Thèse de Doctorat

Henri DER SARKISSIAN

Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université de Nantes
sous le label de l'Université de Nantes Angers Le Mans

École doctorale : Sciences et Technologies de l'Information et Mathématiques

Discipline : Informatique et applications, section CNU 27
Unité de recherche : Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

Soutenue le 4 juin 2015
ED 503

Tomographie et géométrie discrètes avec la transformée Mojette

JURY

Président :	**M. Manuel BARDIÈS**, Directeur de Recherche INSERM, UMRS 1037 CRC Toulouse
Rapporteurs :	**Mme Françoise PEYRIN**, Directeur de Recherche INSERM, CREATIS Lyon **M. David COEURJOLLY**, Directeur de Recherche CNRS, LIRIS Lyon
Examinateur :	**Mme Myriam SERVIÈRES**, Maître de Conférences, CRENAU, École Centrale de Nantes
Invités :	**M. Benoît RECUR**, Docteur en Informatique, The Australian National University, Canberra **M. Pierre TERVÉ**, Ingénieur, Keosys, Saint-Herblain
Directeur de thèse :	**M. Jeanpierre GUÉDON**, Professeur des Universités, IRCCyN, Polytech, Université de Nantes
Co-directeur de thèse :	**M. Nicolas NORMAND**, Maître de Conférences HDR, IRCCyN, Polytech, Université de Nantes

Des images*, des figures*
Désimagent*, défigurent*
Des figurants à effacer
Des faces A, des faces B

Remerciements

Je tiens à remercier très chaleureusement Dr Manuel Bardiès d'avoir accepté de présider mon jury de thèse. Ces quelques mots ne sauraient témoigner de toute ma reconnaissance.

Je remercie également Dr Françoise Peyrin et Dr David Coeurjolly de m'avoir fait l'honneur de rapporter cette thèse. Leurs analyse, remarques et conseils judicieux suite à la lecture consciencieuse de ce long manuscrit m'ont été de précieux atouts lors de la finalisation de la thèse. Merci aussi à Dr Myriam Servières, dont les travaux antérieurs m'ont beaucoup inspiré, d'avoir participé au jury de thèse.

Merci enfin à M. Pierre Tervé et Dr Benoît Recur pour le suivi et leur soutien tout au long de la thèse, jusque dans le jury de soutenance.

Enfin ? Pas tout à fait. Je dois avant tout la réussite de cette thèse à mes deux directeurs, Jeanpierre Guédon et Nicolas Normand, grâce à leur encadrement et leur soutien à toute épreuve. Vos *coups de pieds au cul* vont me manquer. Mais aussi et surtout les discussions riches au labo, sur la terrasse ou au bistrot, les dîners, le LaTeXet le TikZ, le violet et le noir, le sporting et le grand bazar, le saumon et le foie gras... En fait, merci d'avoir fait de moi votre *padawan*.

Je souhaite également remercier Jérôme Fortineau, directeur de Keosys, sans qui le financement de cette thèse n'aurait pas été possible, et l'ensemble des salariés de Keosys pour avoir partagé leur savoir-faire. Je tiens à remercier particulièrement Jonathan Le Gouestre ainsi que mes collègues doctorants (fuyez, pauvres fous !) Éloïse Grossiord, Laure Mahé et Geoffrey Roman Jimenez.

Un grand merci qui traverse les océans pour Imants Svalbe et Andrew Kingston, les acteurs de l'ombre de ce travail qui m'ont énormément apporté de

par nos nombreux échanges scientifiques. Merci aussi à vous et vos familles pour l'accueil si chaleureux que vous m'avez réservé. Je profite du moment australien pour remercier à nouveau Benoît RECUR, pour l'hébergement, les discussions et les moments passés entre le quai et son bateau.

Je regrette déjà les moments passées au sein de l'équipe Images et Vidéo Communications de l'IRCCyN pour son ambiance unique à la fois stimulante et conviviale. Je remercie mes collègues et amis de l'équipe qui par leur bonne humeur ont toujours su me faire rire : Patrick LE CALLET le chef d'orchestre, Florent AUTRUSSEAU — mon compagnon de périple australien — pour les nombreuses relectures de thèse, Benoît PARREIN pour la croisière promise, Matthieu PERREIRA DA SILVA pour son humour, Aurore ARLICOT et Lucile LE CLAIRE pour leur enthousiasme rafraîchissant, Romuald PÉPION pour son humeur, Lukáš KRASULA pour son accueil à Prague, Filippo MAZZA pour son énergie et son café, Dimitri PERTIN pour les sports de raquette à haut risque, Romain COHENDET d'être parfois plus à l'ouest que moi, Pauline BLÉRY pour les péripéties à San Diego, et tous les autres membres de l'équipe avec qui j'ai partagé mon quotidien et les pots.

Il est des personnes qui sont source d'inspiration. Je souhaite remercier chaleureusement Ludovic FERRER qui m'a initié à l'imagerie médicale et guidé vers la thèse.

Merci aux Soubas Résille pour l'interlude musical du lundi soir et à mes colocataires de Centrale, Georges, Guillaume, Olivier, Pierre et Vincent. Je ne pourrais jamais assez remercier Maxime COLLOMB, qui a tellement relu et corrigé le manuscrit qu'il aurait pu soutenir à ma place.

Merci à ma famille pour avoir toujours été là pour moi dans les bons moments comme les plus difficiles, et à ma belle famille de s'être si bien occupés de moi durant toutes ces années.

Enfin, je remercie Toinon VIGIER d'avoir fait preuve d'une grande patience et d'une aide précieuse durant ces années de thèse tout en ayant su me changer les idées lorsque j'en avais besoin. À la fois *designer* de posters, de présentations, correctrice de thèse, musicienne et chercheuse, j'espère que cette liste n'en finira pas de s'étoffer.

Table des matières

Introduction générale

Dans notre société, l'imagerie médicale est omniprésente à toutes les étapes de la prise en charge du patient : du dépistage au suivi thérapeutique en passant par le diagnostic.

Dès l'aube du XX$^{\text{e}}$ siècle, la radiographie aux rayons X permet de visualiser l'intérieur du corps humain de manière non invasive et d'améliorer la détection de traumatismes et pathologies.

Un demi-siècle plus tard, l'invention de l'ordinateur par J. von Neumann déclenche le développement fulgurant de l'informatique et l'apparition des langages de programmation évolués ouvre l'accès, pour la sphère scientifique, aux algorithmes de traitement automatisé de données.

Dans les années 1970, les premiers algorithmes de reconstruction tomographique conduisent à l'invention de la tomodensitométrie, plus communément désignée par l'anglicisme *scanner*, qui permet une représentation volumique en coupe des tissus et organes scrutés. L'ampleur du progrès engendré par cette invention est telle que ses inventeurs, A. Cormack et G. Hounsfield, recevront le prix Nobel de physiologie ou médecine en 1979. Ces coupes sont obtenues à partir d'une série de radiographies numériques prises à différents angles de vues en tournant autour du patient : c'est le principe de la tomographie.

Rapidement, de nombreuses autres modalités d'imagerie médicale bénéficient de cette technique — tomographie par émission de positons, tomographie par émission monophotonique, imagerie par résonance magnétique, etc. — la rendant indispensable à la pratique de la médecine moderne. Mais, en contrepartie de l'information précieuse qu'elle fournit, une acquisition tomographique requiert de nombreuses prises de vues, démultipliant par conséquence l'effet néfaste des rayonnements ionisants sur le corps humain.

Autant pour améliorer les performances de ces systèmes que pour en limiter l'impact sur le patient, la tomographie est aujourd'hui un champ de recherche actif en mathématiques, informatique, traitement du signal, physique et médecine. Plus précisément, dans le domaine des sciences de l'information, la tomographie est étudiée comme un problème inverse qui consiste à reconstruire un objet dont on connaît une représentation partielle et discrète à travers ses projections. À cet effet, plusieurs modèles sont proposés dont celui de la transformée Mojette.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux propriétés de l'espace induit par les projections discrètes à l'aide de la transformée Mojette, que nous appellerons plus simplement espace Mojette. Nous développons ce manuscrit en trois parties.

La première partie est dédiée à la mise en place du problème de la tomographie et du cadre de la tomographie discrète en utilisant la transformée Mojette. Ainsi, le chapitre 1 constitue une introduction au problème de reconstruction tomographique, que nous aborderons non pas d'un point de vue mathématique mais du point de vue de son champ d'application. L'intérêt de cette approche est double. Elle permet d'une part de proposer un contexte large pour notre étude. D'autre part, elle permet, en identifiant les points communs et les différences entre les applications, de dégager les principales problématiques de la reconstruction tomographique vis-à-vis de sa discrétisation. Nous dégagerons de ce chapitre trois principales questions :

— Quelle est l'influence du nombre de projections disponibles et de leur distribution angulaire ?
— Quelle est la précision que l'on peut espérer obtenir à une résolution donnée ?
— Quelle est l'influence de l'étendue des valeurs possibles dans l'image reconstruite ?

Ces deux premières questions ont des conséquences immédiates pour la tomographie médicale. En effet, à qualité d'image équivalente, la maîtrise des paramètres d'acquisitions permet de diminuer la dose déposée au patient pour les modalités utilisant des rayonnements ionisants.

Les deux prochains chapitres, issus de l'état de l'art, présentent les tentatives de réponse à ces questions par la tomographie discrète. Ainsi dans le chapitre 2, nous commencerons par exposer les bases mathématiques de la tomographie classique et les limites imposées par la discrétisation. Nous présenterons ensuite la tomographie discrète binaire comme moyen de répondre à notre troisième problème, puis nous introduirons la transformée Mojette à partir de la transformée de RADON de l'espace discret. L'accent sera mis en particulier sur les propriétés de la transformée Mojette vis-à-vis des problématiques sus-citées. Nous donnerons ainsi un critère définissant les directions et le nombre des projections nécessaires à une reconstruction exacte de l'image. Dans l'optique de données insuffisantes vis-à-vis de ce critère, nous détaillerons plus avant la structure de l'espace nul de l'opérateur Mojette pour décrire l'ensemble des images solutions d'un jeu de projections donné.

Tout comme la tomographie discrète ne peut être réduite à une discrétisation de la tomographie continue, la géométrie discrète est un paradigme complet permettant de caractériser des objets mathématiques intrinsèquement discrets. Nous nous attacherons à présenter et à les développer les liens entre la transformée Mojette et la géométrie discrète dans la seconde partie de cette thèse.

Le chapitre 3 présente les fondations de la transformée Mojette dans la géométrie discrète. Après avoir exposé certains outils fondamentaux de la géométrie discrète, nous les appliquerons à la transformée Mojette. Nous en présenterons deux aspects : d'une part la description des directions discrètes donnée par le concept de points visibles de l'espace discret et les suites de FAREY-HAROS ; et d'autre part le rôle fondamental des opérations de morphologie mathématique dans la caractérisation de l'espace nul de l'opérateur de transformée Mojette.

À ce point, la géométrie discrète semble donc régir les propriétés de l'espace Mojette. Le chapitre 4 sera consacré à la caractérisation de transformations géométriques dans cet espace qui jouent en effet un rôle important en traitement d'images, en particulier dans le domaine médical. L'étude de l'espace Mojette pour certaines transformées affines d'images constituera ainsi le cœur de ce chapitre. La transformée Mojette proposant une représentation exacte de l'espace discret, nous développerons des algorithmes de translation discrète entière et de rotation discrète exacte agissant directement sur les projections discrètes, sans reconstruction préalable de l'image.

La transformée Mojette étant définie de manière exacte sur une grille discrète, nous validerons l'utilisation de la transformée Mojette en tomographie dans les systèmes réels avec incertitude. Nous proposerons et comparerons dans le chapitre 5 deux méthodes d'interpolation pour obtenir des projections discrètes Mojette à partir de projections fournies par des modalités d'imagerie médicale. Nous confronterons ici les résultats obtenus à partir de reconstructions classiques et leurs analogues basés en géométrie Mojette.

Pour conclure nos contributions théoriques, nous poursuivrons l'étude de la tomographie Mojette en proposant une formalisation polynomiale de notre problème de reconstruction dans le chapitre 6. Ainsi, nous modéliserons l'espace discret d'acquisition et de reconstruction par des polynômes dans un anneau quotient, ce qui nous permettra d'exprimer la matrice de projection Mojette sous forme d'une matrice de Vandermonde. Cette expression originale pour la transformée Mojette a l'avantage d'être largement étudiée dans la littérature en analyse numérique et en théorie des codes. Nous pourrons donc tirer parti des méthodes d'inversion de systèmes de Vandermonde en les adaptant à la reconstruction Mojette. Nous utiliserons également la représentation polynomiale pour relier les modèles de projection Mojette et de projection FRT, qui est une autre transformée discrète supposant un espace périodique, à l'instar de la transformée de Fourier discrète.

Enfin, cette thèse ayant été réalisée en partie au sein de l'entreprise Keosys dans le cadre du projet FUI Quanticardi, un travail conséquent et plus industriel a été mené en parallèle de nos travaux théoriques. La troisième et dernière partie présentera la conception et la réalisation, basées sur l'état de l'art, d'un logiciel proposant la chaîne complète de traitements nécessaires à la quantification absolue de la perfusion myocardique en médecine nucléaire. Actuellement, le fruit de ce travail est en phase finale d'intégration dans la solution commerciale de Keosys.

Première partie

Tomographie

Introduction de la première partie

La première partie de cette thèse est dédiée à la tomographie. Elle est composée de deux chapitres.

Le premier chapitre présente la tomographie à travers des exemples d'applications dans des domaines variés. Ces cas d'utilisation et les conditions de réalisation, souvent dictées par les dispositifs physiques d'acquisition, nous permettent de dégager les grandes problématiques pratiques auxquelles les communautés scientifiques sont confrontées.

Afin de répondre à ces problématiques, il est nécessaire de fixer un cadre mathématique plus formel qui structure notre second chapitre. En particulier, nous montrerons que le concept de tomographie discrète, apparu dans les années 1980, permet en partie de répondre aux problèmes de données manquantes. Nous y présentons ainsi la transformée Mojette, développée par l'équipe *Image, Vidéo et Communication* de l'IRCCyN depuis vingt ans, dont les applications en tomographie et géométrie discrète font l'objet de notre recherche.

Chapitre 1

Introduction à la tomographie à travers ses applications

Dans ce chapitre, nous parcourons la tomographie à travers ses applications actuelles. Notre objectif est de donner une vision intuitive des principes, enjeux et limites de la reconstruction par tomographie.

Sommaire

1.1 Introduction et exemples d'utilisation de la tomographie

Le terme « tomographie » tire ses racines du grec *tomos* signifiant morceau coupé et de *graphein* signifiant écrire. La tomographie est l'art de la reconstruction d'un objet à partir d'informations sur ses projections. Elle est célèbre pour ses applications en médecine où de nouvelles modalités d'imagerie tomographique ne cessent de voir le jour (tomodensitométrie, tomographie à émission de positons, tomographie d'émission monophotonique, etc.) ainsi qu'en sciences des matériaux (contrôle non-destructif de structures, étude de la micro-architecture, etc). Bien qu'on ne l'associe souvent qu'à un rôle de technique d'imagerie [174], il existe d'autres applications de la tomographie en dehors de l'imagerie, comme par exemple la transmission, le codage et le décodage de l'information dans les systèmes distribués.

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire différents champ d'application de la tomographie pour en extraire les points communs et les principales problématiques. Puis, à travers d'autres exemples simples, nous nous attachons à donner une définition intuitive des mécanismes globaux de la tomographie, en particulier les opérations de projection et de rétroprojection. Enfin, les notions introduites vont nous permettre de présenter un premier algorithme de reconstruction tomographique.

1.1.1 Tomographie en médecine

En médecine, la tomographie permet d'étudier l'intérieur du corps humain par voie externe. Les nombreux systèmes d'acquisition disponibles, appelés *modalités d'acquisition*, se différencient par la nature de l'information qu'ils permettent d'exhiber et les capteurs et contraintes physiques qui y sont associés. Nous pouvons ainsi classer les modalités en deux principales catégories d'imagerie :

L'imagerie *anatomique* ou *morphologique* Les images caractérisent une propriété physique des tissus imagés, par exemple la densité. Ce type d'imagerie permet d'observer la localisation, la taille, le volume, la texture ou encore la densité des organes et des tissus. On s'intéresse ici aux contours et aux contrastes.

L'imagerie *fonctionnelle* Les images produites sont des cartographies d'une fonction métabolique comme la consommation de glucose, la perfusion, l'hypoxie ou la fixation spécifique d'un anticorps. Il n'est plus question ici d'étudier une morphologie, mais de savoir si tels tissus ou tels organes remplissent bien leur fonction et de sélectionner les régions qui répondent positivement à un stimulus. Même si la résolution des images est macroscopique, les images témoignent de phénomènes à l'échelle moléculaire. C'est pourquoi le lecteur pourra aussi trouver le terme d'imagerie *moléculaire* pour désigner cette catégorie.

Pour ce qui est de la physique d'acquisition, nous distinguons les catégories suivantes :

— l'imagerie de transmission (TDM [1]) ;
— l'imagerie à résonance magnétique (IRM [2]) ;
— l'imagerie d'émission (TEP [3], TEMP [4]) ;

Enfin, les moyens physiques d'observation (sources et capteurs) peuvent fonctionner avec des rayons de nature ionisante (TDM[1], TEP[3], TEMP[4]) ou non (IRM[2]).

Certaines de ces modalités sont très imposantes et nécessitent un local entier dédié, alors que d'autres appareillages sont très légers voire portables. Les temps d'acquisition sont également extrêmement variables de même que la résolution.

Il convient alors d'adapter la modalité à l'information que l'on souhaite acquérir et aux contraintes physiques et pratiques de mise en œuvre. Malgré tout, l'information nécessaire au diagnostic est souvent mixte. On souhaite par exemple pouvoir quantifier le niveau d'activité métabolique d'une tumeur ainsi que sa localisation précise. Pour répondre à ces besoins, l'imagerie *multimodale* regroupe en une seule machine plusieurs types d'imageries complémentaires, comme le fameux « TEP-scan » utilisé en oncologie qui associe un scanner à rayons X pour l'information

1. Tomodensitométrie
2. Imagerie à Résonance Magnétique
3. Tomographie à Émission de Positons
4. Tomographie d'Émission MonoPhotonique

morphologique et une tomographie à émission de positons pour l'information fonctionnelle. La figure 1.1 donne un aperçu de l'imagerie fonctionnelle, morphologique et multimodale.

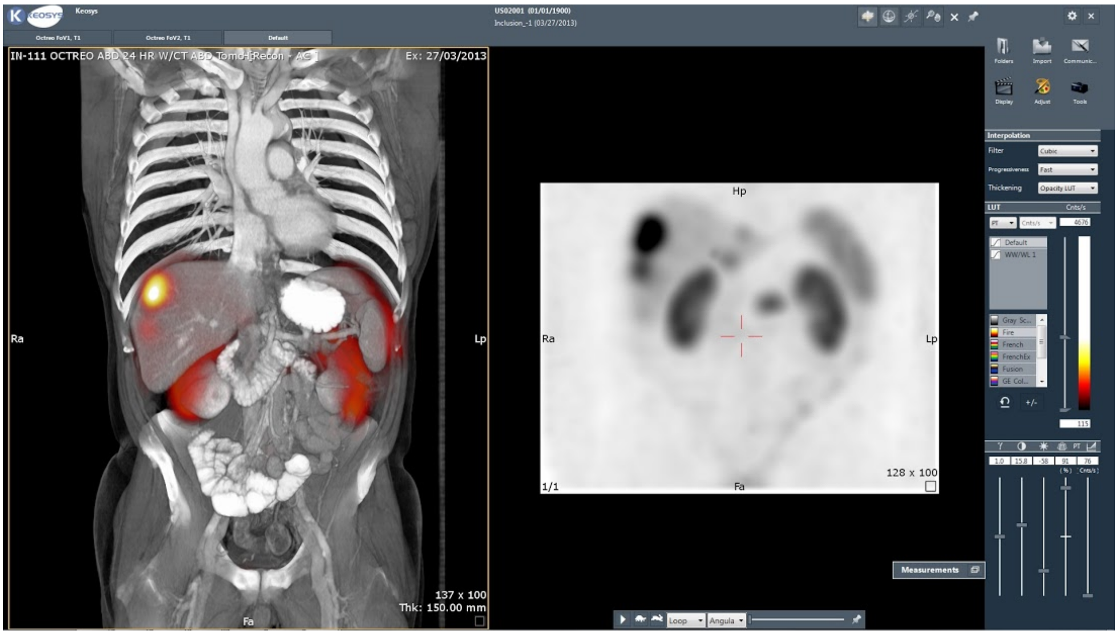


FIGURE 1.1 – Imagerie multimodale sur la plateforme Keosys. Sur l'écran de droite, imagerie de tomoscintigraphie (TEMP) à l'indium 111. Sur l'écran de gauche, fusion multimodale de l'image de droite (fonctionnelle) et de l'image morphologique

1.1.1.1 Tomodensitométrie [97]

La tomodensitométrie est l'extension tomographique de la radiologie conventionnelle. Son principe repose sur l'acquisition d'images radiographiques numériques à différents angles de vues en faisant tourner une source de rayons X détectés par plusieurs capteurs positionnés autour du patient.

Le rayonnement électromagnétique émis par la source est atténué par les tissus traversés de façon plus ou moins sévère selon le numéro atomique et la densité du milieu (cette dernière a d'ailleurs un rôle souvent prépondérant). Les détecteurs mesurent alors le flux de rayons X en sortie du patient et, en le rapportant au flux émis directement par la source, permettent le calcul du coefficient d'atténuation linéique sur le parcours d'un faisceau.

Ce principe est illustré par la figure 1.2 où un flux de rayons X émis par une source traverse un objet supposé homogène d'épaisseur l et de coefficient d'atténuation linéique μ. La relation liant le flux émis ϕ_0 et le flux transmis mesuré en sortie de l'objet ϕ est donné par la loi de Beer-Lambert :

$$\phi = \phi_0 \exp(-\mu l). \tag{1.1}$$

Les objets que l'on désire imager n'étant en général pas homogènes, nous pouvons généraliser cette relation dans le cas où le flux traverse n milieux d'épaisseur l_i et de coefficient d'atténuation μ_i :

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 \exp\left(-\mu_1 l_1\right) \times \exp\left(-\mu_2 l_2\right) \times \cdots \times \exp\left(-\mu_n l_n\right) && (1.2) \\ &= \phi_0 \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \mu_i l_i\right). && (1.3) \end{aligned}$$

Les scanners ont bénéficié de nombreuses évolutions technologiques et optimisations dans un souci de diminution de la dose radioactive délivrée au patient et du temps d'acquisition nécessaire. Ces évolutions ont bien sûr eu lieu en parallèle d'avancées informatiques et mathématiques permettant de traiter les données plus efficacement [5]. Cependant, les principes physiques et mathématiques restent les mêmes.

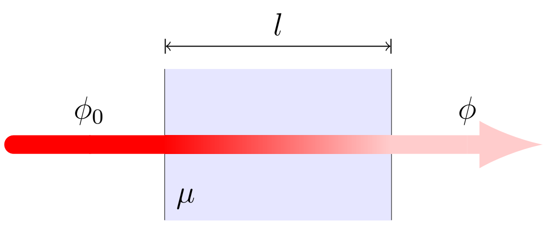


FIGURE 1.2 – Traversée d'un corps d'épaisseur l par un flux de rayons X

1.1.1.2 Tomosynthèse

La tomosynthèse est une modalité d'imagerie médicale à rayons X tout comme le scanner. La principale différence réside dans la trajectoire de la source et des détecteurs. Contrairement au scanner, la source et les capteurs ne tournent pas autour du patient mais sont simplement translatés dans un même plan. Les coupes sont ensuite reconstruites en sommant des versions décalées des images de projections obtenues. Le principe de fonctionnement de la tomosynthèse est présenté dans la figure 1.3.

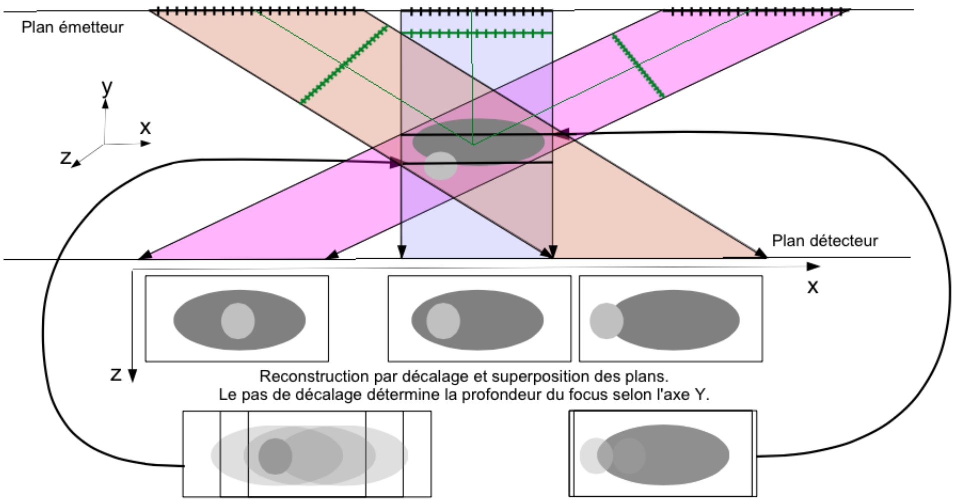


FIGURE 1.3 – Schéma de principe de la tomosynthèse : les différentes radiographies mesurées sont décalées et superposées. Le décalage permet de focaliser à différentes profondeurs.

Il est intéressant de noter que la tomosynthèse peut être obtenue par radiographie numérique ou sur film photosensible (analogique). En effet, il suffit de superposer les différents films en les décalant pour visionner successivement les différentes coupes.

Par conséquent, les détecteurs n'ayant plus besoin d'effectuer des rotations précises et la reconstruction pouvant être réalisée directement sur film photosensible, un des atouts de la tomosynthèse est de bénéficier de coûts d'installation réduits par rapport au tomodensitomètre puisque l'installation ne diffère qu'à peine des tables de radiologie classiques (voir figure 1.4). L'autre avantage est de pouvoir approcher la source aussi près que possible du patient sans que le mouvement de rotation ne soit gêné par la morphologie de celui-ci.

Si les premiers dispositifs de tomosynthèse étaient analogiques, les développements récents se tournent vers la tomosynthèse numérique, notamment dédiée à la mammographie tridimensionnelle.

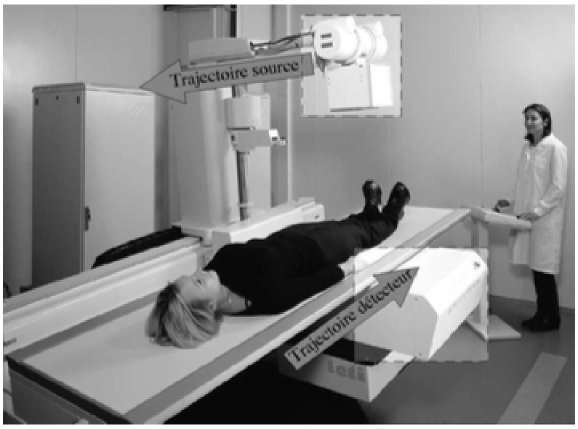


FIGURE 1.4 – Système de tomosynthèse table BACCARA et capteur PALADIO, tiré de [19]

La tomosynthèse, malgré des avantages indéniables, n'est pas exempte de défauts. La reconstruction des coupes est souvent de moins bonne qualité qu'en tomodensitométrie. La résolution spatiale est également moins élevée que celle du TDM et de plus très anisotrope du fait des techniques de reconstruction.

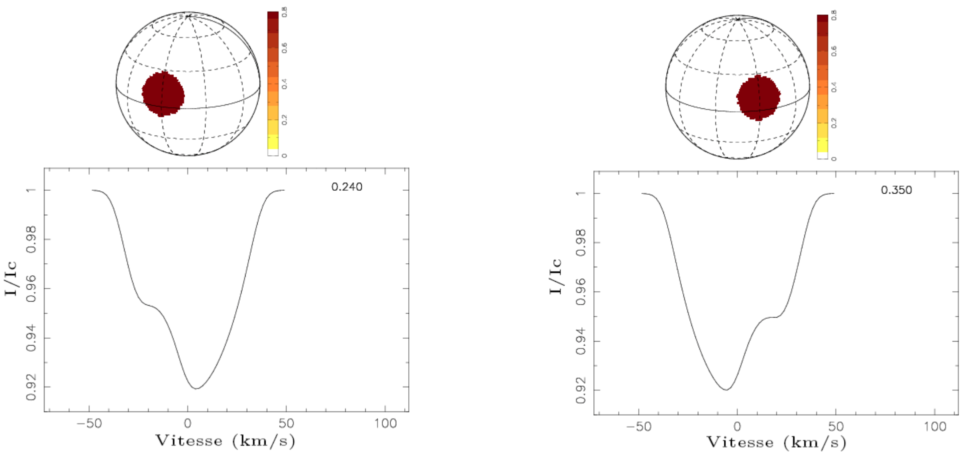
1.1.2 Tomographie en astrophysique

Un autre domaine d'application de la tomographie est l'astrophysique où elle permet d'étudier la surface des étoiles, leurs propriétés électro-magnétiques ou même de scruter le ciel à la recherche de nouveaux astres. Nous présenterons dans cette section deux techniques d'imageries tomographiques spatiales. La première est l'imagerie ZEEMAN-DOPPLER, dont le principe est d'étudier les rayonnements électromagnétiques des astres au cours de leur rotation propre. Puis nous présenterons dans un second temps la place de la tomographie dans l'interférométrie optique, technique de pointe d'imagerie stellaire.

1.1.2.1 Imagerie Zeeman-Doppler

En astrophysique, la surface des étoiles est étudiée grâce à la tomographie Doppler [113]. Chaque étoile émettant un rayonnement électromagnétique, l'étude des raies spectrales d'un astre en rotation rapide, décalées par l'effet Doppler, produit une cartographie en une dimension de la surface de celle-ci. Ces raies spectrales sont également affectées par les taches solaires, comme illustré par la figure 1.5.

Le principe est alors de sonder la surface de l'étoile à chaque instant de sa rotation afin d'obtenir le profil des raies spectrales de projection de chaque tranche de l'étoile pour différentes angulations, comme nous pouvons le voir sur la figure 1.6. Ces profils s'apparentent aux profils d'absorption de rayons X de la sous-section 1.1.1.1 et constituent des projections.



(a) (b)

Figure 1.5 – Projections par imagerie Doppler d'une perturbation sur un astre à différentes étapes de sa rotation, traduite depuis [129]

La reconstruction tomographique permet de retrouver la latitude des perturbations et ainsi de reconstruire la distribution des raies spectrales sur la surface tridimensionnelle de l'étoile à partir de ses projections.

Le même principe s'applique pour reconstruire non plus la localisation des taches solaires, mais l'intensité et l'orientation du champ magnétique dans celles-ci

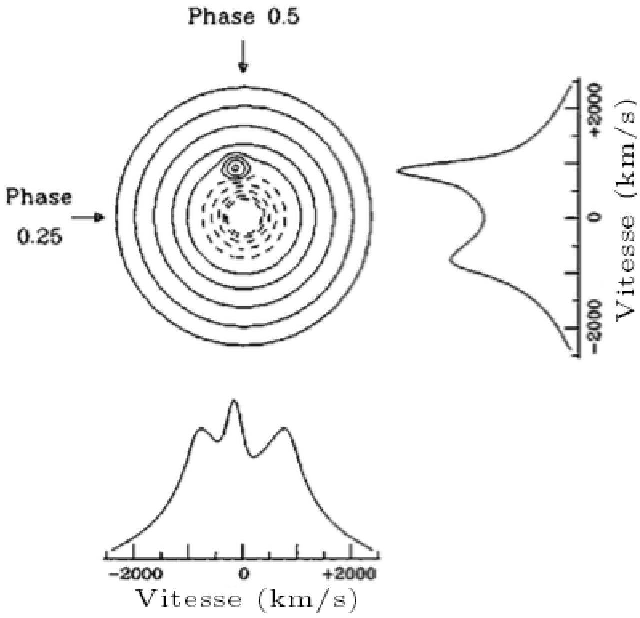


FIGURE 1.6 – Deux projections des raies spectrales émises par un astre aux phases de rotation 0° et 90°, traduite depuis [113]

en utilisant la polarisation des raies spectrales produite par effet ZEEMAN [44, 129]. En effet, la polarisation est fonction de la composante du champ en direction de l'observateur et va donc varier avec la phase de rotation.

1.1.2.2 Interférométrie optique stellaire

En astrophysique, la tomographie est également utilisée en interférométrie optique stellaire. Un interféromètre optique est un système d'observation stellaire permettant d'obtenir des images à très haute résolution en utilisant plusieurs télescopes de petite taille très éloignés les uns des autres plutôt qu'un seul télescope très grand. L'intérêt de l'interférométrie optique est donc d'obtenir une résolution angulaire très nettement supérieure à n'importe quel autre équipement d'observation stellaire (de l'ordre du milli-arc par seconde).

Un interféromètre stellaire est composé d'au moins deux télescopes orientés dans la direction de l'astre à étudier. Comme le montre la figure 1.7, cette angulation produit une différence de marche entre les ondes lumineuses observées par les deux télescopes. Ces signaux sont par la suite synchronisés sur une ligne à retard, ce qui leur permet d'interférer selon les lois de l'optique ondulatoire [160, 161].

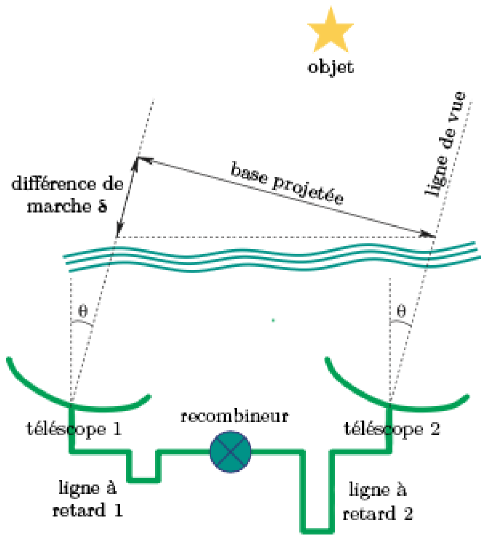


FIGURE 1.7 – Schéma d'un interféromètre stellaire à deux télescopes, traduite depuis [160]

Chaque observation ainsi effectuée, pour une direction (donc une différence de marche) et une longueur d'onde données, fournit un point de mesure dans le plan de Fourier des fréquences spatiales. Le principe est alors de faire varier la différence de marche grâce à la rotation naturelle de la Terre et la longueur d'onde étudiée. Ainsi, la figure 1.8 montre que les mesures obtenues remplissent (de manière incomplète) le plan de Fourier par tranches. Nous verrons dans le chapitre suivant que cela correspond exactement à une projection dans l'espace réel.

Les problèmes soulevés par l'interférométrie optique stellaire sont très proches de ceux que nous allons rencontrer en médecine. Chaque mesure étant très coûteuse en temps (de l'ordre de la journée), il est crucial de pouvoir reconstruire les données à partir d'un nombre très faible de mesures intégrales, tout comme il est primordial de limiter l'exposition d'un être humain aux rayons X.

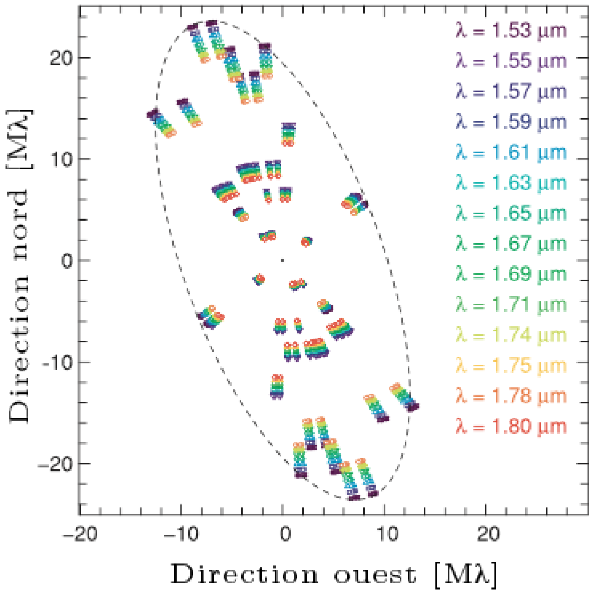


FIGURE 1.8 – Couverture fréquentielle des mesures effectuées à partir de l'interféromètre IOTA à trois télescopes, traduite depuis [160]

1.1.3 Tomographie en microscopie électronique

La microscopie électronique est un moyen d'observer un échantillon à haute résolution. Au lieu d'utiliser un faisceau de lumière visible comme pour le microscope optique, le microscope électronique utilise un faisceau d'électrons. Or, la résolution d'un microscope est limitée par la longueur d'onde du faisceau utilisé pour éclairer l'échantillon. La longueur d'onde d'un électron en microscopie électronique est de l'ordre du picomètre alors que l'intervalle de longueur d'onde de la lumière visible est de l'ordre de 500 nanomètres. Il y a donc une différence de cinq ordres de grandeur entre les deux, qui explique entre autre la différence de grossissement entre les deux types de microscopes.

Dans un microscope électronique, un faisceau d'électrons interagit avec la matière de l'échantillon. Une partie est transmise, c'est-à-dire traverse la matière en subissant une atténuation, une partie est réfléchie et une partie est diffusée. Les interactions à l'échelle atomique entre électrons et matière peuvent également être à l'origine d'un nouveau rayonnement (électrons, photons lumineux ou rayons X).

La mesure de chacune de ces quantités physiques permet d'obtenir des informations sur l'échantillon et de créer une image. C'est pourquoi il existe différents types de microscopes électroniques (en transmission, à balayage, à balayage en transmission, en réflexion, etc.).

Nous nous intéressons ici à la microscopie électronique en transmission (MET). Le principe est schématiquement le même qu'avec des rayons X : il s'agit de mesurer l'intensité du signal transmis et diffracté à travers l'échantillon [56].

L'observation d'échantillons à travers un MET fournit une projection grossie de ce dernier. L'interprétation de ces images bidimensionnelles en projections est rendue difficile par la superposition des structures. La tomographie permet de reconstituer la structure tridimensionnelle de l'échantillon à partir des projections observées sous différentes incidences angulaires [41].

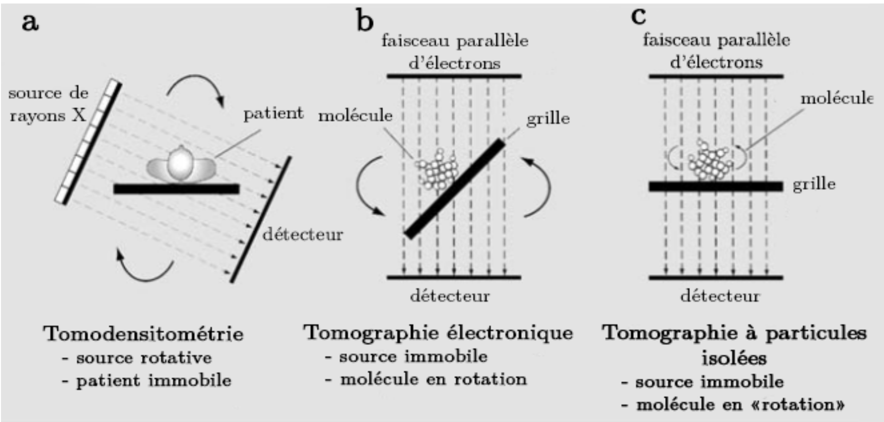


FIGURE 1.9 – Différentes façons d'obtenir des projections, traduite depuis [56]

La figure 1.9 présente trois façons différentes d'obtenir ces projections. Dans le premier cas, le couple source-détecteur tourne autour de l'objet. Dans le second cas, le principe est d'incliner l'échantillon à imager. Le troisième cas de la figure 1.9 s'applique lorsque l'objet à imager est en mouvement naturel, comme une planète ou plus précisément ici une molécule. Ce cas de figure est plus complexe à gérer car les directions sous lesquelles les projections ont été acquises sont aléatoires et inconnues. Le problème de reconstruction des données est donc entaché du biais dû à l'incertitude sur la direction de projection. Ce champ de recherche suscite encore beaucoup d'intérêt [52].

La plupart du temps en tomographie électronique, le couple source-détecteur reste fixe alors que la lame d'échantillon est progressivement inclinée. Le dispositif expérimental ne permet malheureusement pas d'acquérir des projections tout autour de l'objet mais seulement dans un secteur angulaire limité, en général $[-70°, 70°]$ [55]. C'est en tentant de résoudre ce problème de microscopie que R. Gordon, R. Bender *et al.* ont mis au point le premier algorithme de reconstruction tomographique [66] (algorithme que nous expliciterons en section 1.3.2).

La très haute résolution atteignable en microscopie électronique à balayage par transmission peut permettre d'observer des structures cristallines à l'échelle atomique. Cependant, ce n'est que récemment que des chercheurs ont pu reconstruire une image tridimensionnelle à une telle échelle [169]. En effet, la couverture angulaire limitée des projections ainsi que le bruit d'acquisition des projections conduit à des biais importants qui dégradent la résolution de l'image reconstruite. Afin de dépasser ces contraintes, S. Van Aert, K. J. Batenburg *et al.* utilisent un apriori sur la nature binaire de l'image à reconstruire [169] issu de la *tomographie discrète* que nous allons voir au chapitre 2.

Le mode tomographique est très souvent utilisé en microscopie électronique de transmission afin de retrouver l'information de profondeur des échantillons observés. La tomographie électronique souffre cependant de contraintes lourdes, dont notamment le champ angulaire d'acquisition restreint. Ces contraintes sont également souvent présentes en tomographie médicale et en tomographie stellaire.

1.1.4 Tomographie dans les systèmes distribués

Le dernier exemple d'application de la tomographie que nous présentons dans ce chapitre d'introduction est son utilisation dans les systèmes distribués, pour transmettre et stocker de l'information. Contrairement aux autres exemples cités ci-dessus, nous présentons ici un domaine d'application où la tomographie n'est pas destinée à l'imagerie et à la visualisation de données physiques.

1.1.4.1 Codes correcteurs d'erreur : tolérance aux pannes

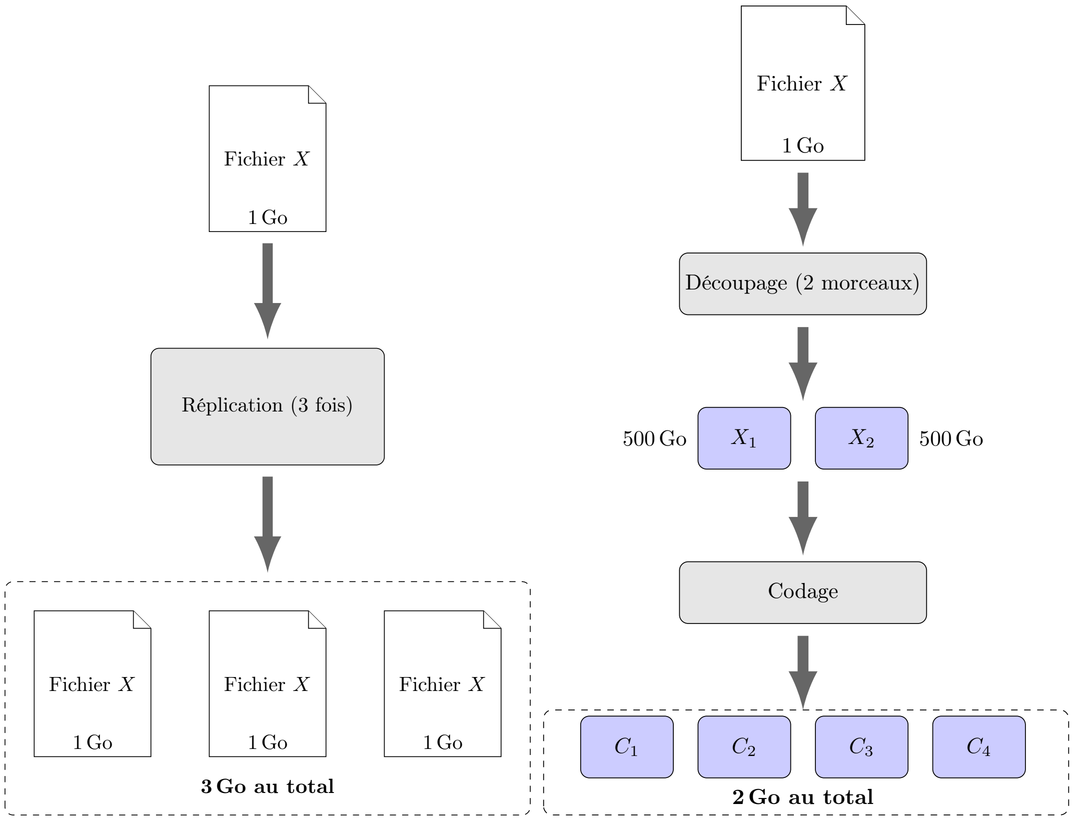
La problématique du stockage et de la transmission sûrs de données est d'importance capitale pour toute société. Cette question est d'autant plus importante que le nombre de données disponibles de par le monde est en croissance exponentielle [59]. Par *sûr*, nous comprenons soit *confidentiel* soit *pérenne*. Concentrons-nous sur cette dernière acception.

Ne pouvant pas prévoir ni éviter toute défaillance matérielle, un incendie, une panne ou tout simplement une mauvaise manipulation, la seule façon de se prémunir de la perte de données est soit de copier et retransmettre l'information, soit d'introduire de la redondance d'information de manière à ce que la donnée restante puisse reconstituer la partie perdue. La manière la plus simple de conserver un document de manière sûre est la réplication. Cette méthode est coûteuse car elle multiplie la taille du stockage nécessaire par le nombre de réplications. Les codes correcteurs sont une alternative à la réplication.

Ils sont un moyen de coder de l'information de manière tolérante aux erreurs, et ce à moindre coût par rapport à la réplication. Les figures 1.10 et 1.11 présentent brièvement les principes des codes correcteurs en alternative à la réplication.

La tomographie peut constituer un moyen de réaliser un code correcteur d'erreur. C'est le cas pour le système de fichiers libre RozoFS [5] qui utilise la transformée Mojette, outil de tomographie dont nous détaillerons le principe au chapitre 2, pour coder les données et décoder l'information. Le principe de la transformée Mojette est d'obtenir des projections de blocs de données pour reconstruire ces blocs sans erreur. Dans le cas du code correcteur, le point essentiel est de générer plus de projections que nécessaire pour reconstruire l'information. La figure 1.12 montre l'encodage d'un flux d'information à l'aide de la transformée Mojette. Les données transmises seront les projections des données et non les données elles-mêmes. En effet, il est possible de reconstruire (décoder) les données originales à partir de seulement deux projections sur les trois fournies. Le système est ainsi tolérant aux pannes.

5. http ://www.rozofs.org



(a) Réplication (b) Code correcteur

FIGURE 1.10 – Application des codes correcteurs d'erreur pour la redondance de l'information sur un support de stockage, adapté de [170]

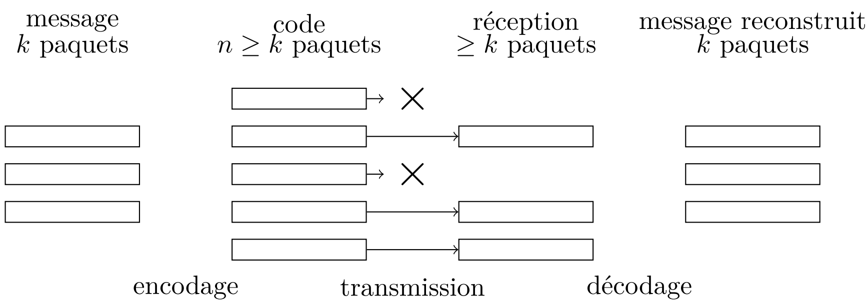


FIGURE 1.11 – Schéma de principe d'un code correcteur, tiré de [128]

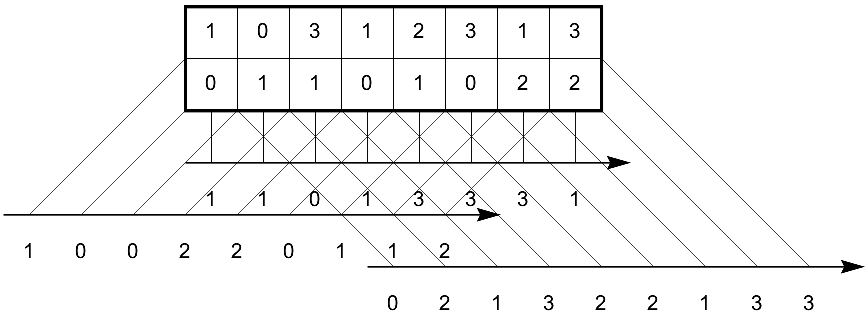


FIGURE 1.12 – Encodage d'un *buffer* géométrique à partir de ses projections, tiré de [128]

1.1.4.2 Codes correcteurs d'erreur : confidentialité

Nous nous intéressons à présent à la sécurité des données. Nous souhaitons donc que l'information partiellement transmise ne permette pas de décoder les données. Nous pouvons protéger la transmission des données en utilisant un encodage basé sur les projections comme nous l'avons vu précédemment. En effet, si pour conserver l'intégrité des données il est nécessaire de transmettre plus de projections que nécessaires pour le décodage, nous pouvons *a contrario* limiter le nombre de projections pour rendre l'information indéchiffrable.

Dans le cas du stockage distribué, nous pouvons mettre en œuvre un tel schéma en ne distribuant qu'un nombre limité de paquets (projections Mojette) à chaque nœud, afin que chaque nœud ne puisse décoder seul la donnée. La donnée détenue par chaque nœud, certes limitée, doit par contre être astucieusement répartie pour que n'importe quel sous-ensemble de nœuds de taille suffisante puisse reconstituer la donnée initiale. Ainsi, non seulement le stockage est tolérant aux pannes, mais il est également confidentiel dans la mesure où chaque nœud pris séparément ne peut lire la donnée en clair.

Ce principe a également été mis en œuvre pour la transmission de données sur un réseau Wi-Fi point à point. Dans ce cas, on considère un réseau où les paquets sont acheminés successivement par les clients de l'émetteur au destinataire. Dans un tel cas, il est indispensable que chaque client ne voie pas transiter la donnée décodée. Un exemple en est donné dans la figure 1.13, où nous supposons qu'un minimum de trois projections est nécessaire pour pouvoir reconstruire les données.

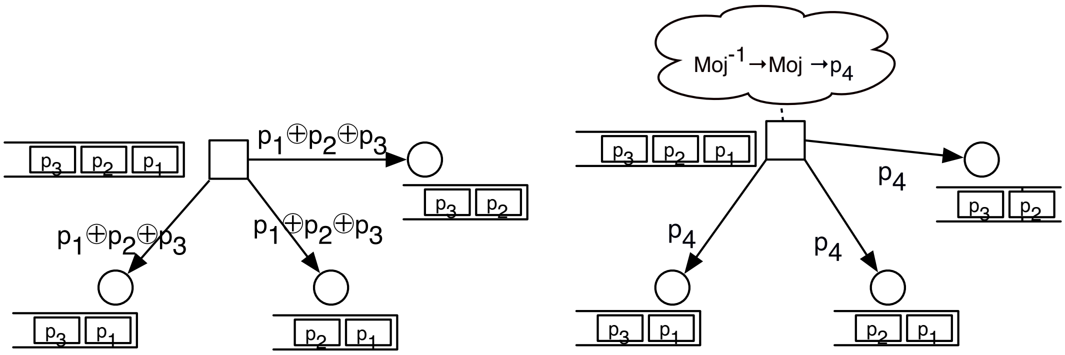


FIGURE 1.13 – Codage basé sur la transformée Mojette pour la transmission sécurisée de paquets sur un réseau, reproduit de [128]

Sur cette figure, le schéma de gauche est une configuration classique où un fichier est simplement scindé en trois morceaux p_1, p_2 et p_3. Chacun des trois nœuds connaît seulement deux des trois parties du fichier. Pour reconstruire le fichier complet, les nœuds peuvent, au choix, soit mutualiser leur information, soit obtenir une donnée supplémentaire diffusée sur le réseau. Il en va de même pour le schéma de droite, où les parties du fichier sont remplacées par des projections de celui-ci. En mettant en commun leur information, les nœuds peuvent reconstituer le fichier à partir des trois projections ; ou alors en obtenant chacun une projection complémentaire. L'avantage du deuxième système est qu'aucune des parties du fichier ne transite en clair ni n'est stockée par les nœuds car ceux-ci ne reçoivent que des projections.

1.1.4.3 Bilan

Nous avons présenté dans cette section une application originale de la tomographie au stockage redondant, stockage distribué et transmission sur un réseau. Les conditions d'application et les hypothèses sont très différentes de celles des exemples précédents.

En effet pour toutes les applications précédentes en imagerie, la tomographie est un moyen d'accéder à une information en dimension deux ou trois qu'il est impossible de mesurer physiquement. Cependant, il devient possible d'en calculer une approximation à partir de mesures intégrales en une ou deux dimensions. Ici l'intérêt de la tomographie est d'introduire de la redondance contrôlée pour assurer une sécurité de stockage maximale à moindre coût. De plus, la tomographie permet ici de produire un signal suffisamment décorrélé de l'original pour pouvoir assurer partiellement la confidentialité des données.

Les algorithmes de reconstruction seront alors différents en fonction des hypothèses, une propriété importante pour le stockage étant de pouvoir reconstruire le signal original de manière exacte, sans erreur.

1.2 Définition intuitive

Nous avons vu différentes applications de la tomographie dans la section précédente. Sans entrer dans les détails du mécanisme, nous pouvons observer un point commun entre tous les exemples sus-cités : les données sont mesurées le long de lignes ou de plans autour de l'objet à étudier et le but est de reconstituer cet objet à partir des mesures réalisées. Nous allons commencer par donner une solution intuitive pour résoudre ce problème à travers l'exemple d'un jeu basé sur la tomographie, puis nous allons introduire un des premiers algorithmes de reconstruction tomographique.

1.2.1 Jeu Mojette

Le jeu Mojette est un jeu mathématique se rapprochant du désormais célèbre casse-tête japonais Sudoku. Il a été créé par J. Guédon en 2010.

Le but du jeu Mojette est de reconstituer une grille composée uniquement de trois chiffres différents entre zéro et neuf à partir des projections discrètes de celle-ci. Le plateau du jeu est exposé en figure 1.14. Le joueur dispose alors :

— d'une forme de grille dont les valeurs ont été effacées ;

— des projections discrètes dans plusieurs directions de cette grille.

À partir des projections, le joueur doit retrouver les valeurs que contenait initialement la grille ainsi que leurs positions dans la grille. Notons que parfois plusieurs solutions peuvent convenir. Pour jouer, il faut d'abord savoir comment les projections discrètes sont obtenues.

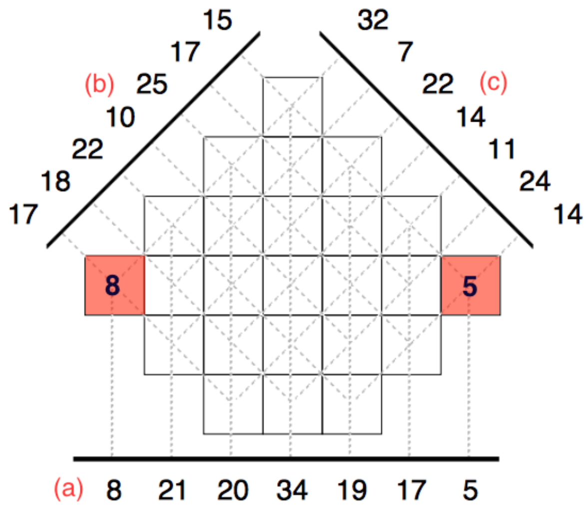


FIGURE 1.14 – Plateau du jeu Mojette [70]

1.2.1.1 Projections discrètes

Nous remarquons que l'on dispose de 3 projections notées (a), (b) et (c) sur la figure 1.14. La ligne de projection (a) est horizontale, elle consiste en la somme de chaque colonne. Les projections (b) et (c) sont quant à elles obtenues en sommant toutes les cases alignées respectivement sur la diagonale Nord-Ouest et Nord-Est. On appellera les valeurs des projections discrètes des *bins*. Un exemple simple de l'obtention de ces projections est donné dans la figure 1.15.

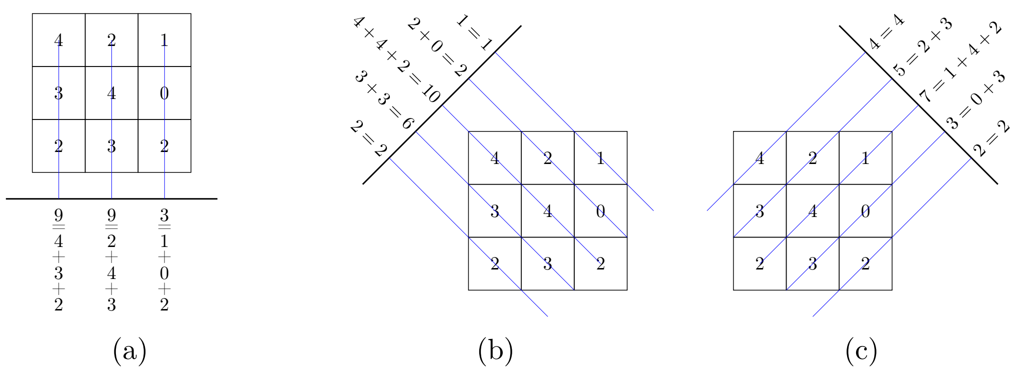


FIGURE 1.15 – Obtention des projections discrètes d'une image de taille 3×3

1.2.1.2 Résolution

La résolution commence par les bords. L'examen des projections montre que certaines cases sont projetées directement sur un bin (valeur sur une projection), comme c'est le cas pour les cases rouges dans la figure 1.14. Les valeurs de ces cases sont alors égales à la valeur du bin correspondant.

Il s'agit ensuite de procéder par élimination, en sachant que la grille contient uniquement trois valeurs différentes. On soustrait à chaque bin sur les projections les valeurs des cases déjà retrouvées et chaque nouvelle case reconstruite permet d'en débloquer d'autres.

1.2.2 Un premier algorithme itératif

Le jeu Mojette est un exemple de tomographie avec des contraintes particulières (exactement trois directions de projection discrète ainsi que trois valeurs possibles des cases). Reprenons l'exemple de la figure 1.15 avec deux projections, une horizontale et une verticale.

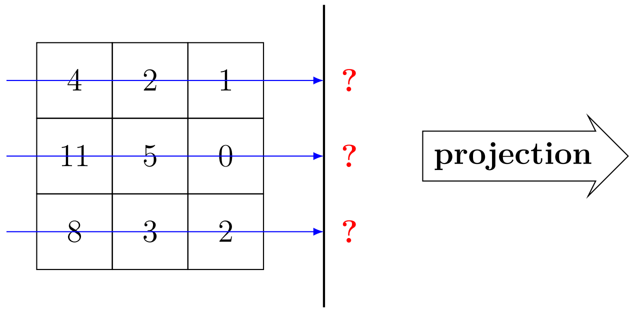
Nous allons décrire ici un algorithme intuitif dans ses grandes lignes, puis le décrire plus formellement dans la section suivante. Dans cette section, on désignera par *image* une grille composée de cases contenant des valeurs, comme dans le jeu Mojette.

Le principe est le suivant :

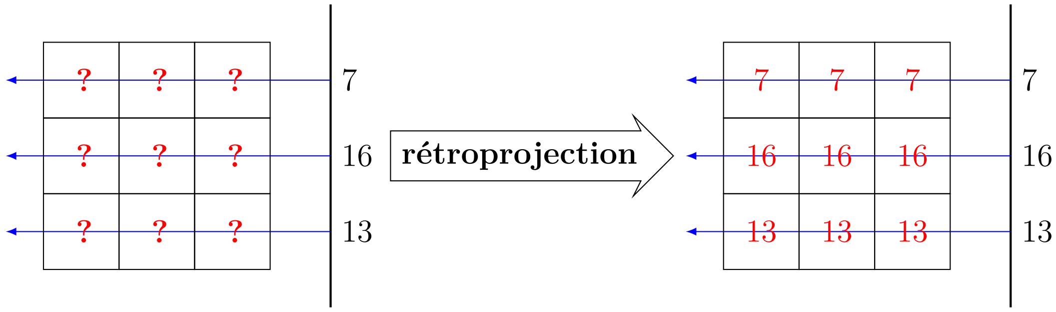
1. On part d'une estimation initiale de l'image à reconstruire, en général une image uniforme.
2. On calcule une projection de l'image en cours de reconstruction.
3. On calcule la différence entre la projection obtenue et celle qui est fournie.
4. On ré-injecte l'erreur calculée sur les projections à l'intérieur de l'image.
5. On répète les étapes 2, 3 et 4 alternativement avec chaque projection jusqu'à ce que l'erreur calculée soit suffisamment faible.

1.2.2.1 Rétroprojection de l'erreur

L'étape 4 est appelée *rétroprojection*. C'est une opération duale à la projection dans le sens où elle consiste à injecter dans l'image les valeurs des projections. La rétroprojection revient à épandre la valeur d'un bin sur toute la ligne de projection correspondante. La figure 1.16 illustre cette dualité : pour l'opérateur de projection la donnée est l'objet (ou l'image) et le résultat est la projection (symbolisée en rouge sur la figure 1.16a) ; alors que pour la rétroprojection, la donnée est la projection et le résultat est l'objet (symbolisé en rouge sur la figure 1.16b).



(a)



(b)

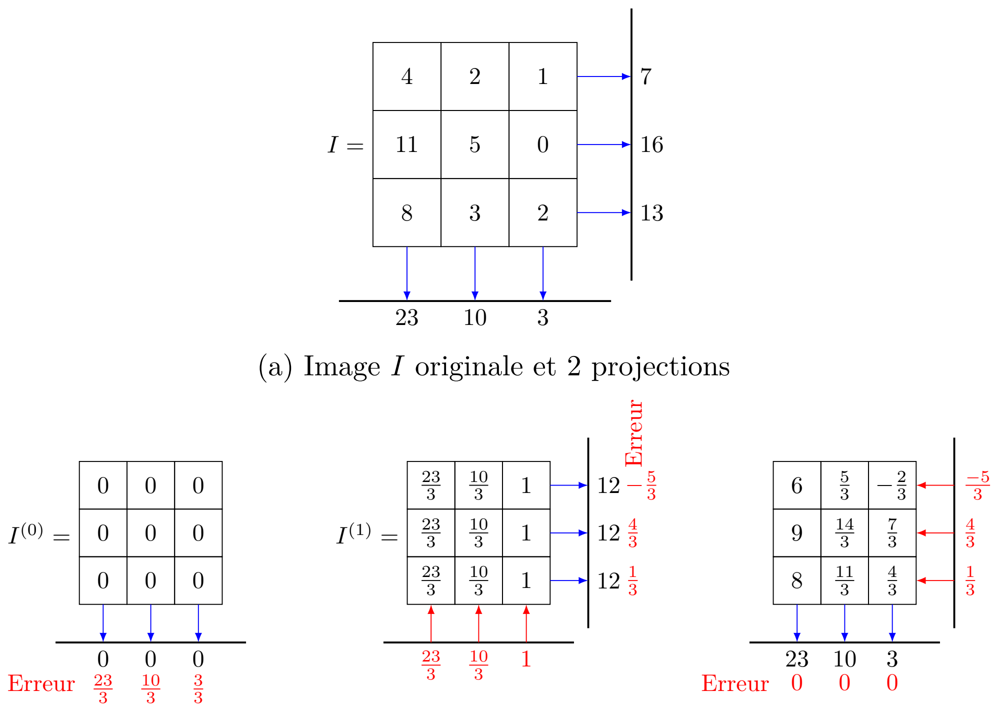
FIGURE 1.16 – Dualité de la projection (a) et de la rétroprojection (b) discrètes. Les éléments en rouge symbolisent le résultat de ces opérations.

Dans l'algorithme précédent, on rétroprojette successivement la différence entre le bin calculé depuis la donnée en cours de reconstruction et le bin initial, normalisée par le nombre de pixels traversés. La normalisation permet de moyenner l'erreur sur la ligne de projection. Elle permet d'obtenir à chaque itération une image satisfaisant entièrement les conditions sur une des projections. Ce schéma itératif converge vers une solution qui convient simultanément à toutes les projections.

1.2.2.2 Exemple de reconstruction

La figure 1.17 est un exemple de reconstruction d'une image de taille 3×3 à partir de deux projections discrètes à l'aide de l'algorithme ART. Sur cette figure, les flèches bleues symbolisent les opérations de projection et les flèches rouges correspondent aux rétroprojections.

À la deuxième itération, l'erreur mesurée sur les deux projections est nulle, l'image ne sera donc pas mise à jour lors d'une troisième itération. L'algorithme a donc convergé.



(b) Estimée initiale $I^{(0)}$ (c) Première itération $I^{(1)}$ (d) Deuxième itération $I^{(2)}$

FIGURE 1.17 – Exemple de reconstruction d'une image de taille 3×3 à l'aide de l'algorithme ART

Notons que nous avons convergé ici vers une solution qui satisfait bien les deux projections initiales, mais différente de l'image de départ ! En effet, le système que nous étudions est sous-déterminé : six équations pour neuf inconnues.

Pour retrouver l'image de départ, il faut ajouter de l'information au problème, comme par exemple réduire le nombre de valeurs possibles (comme dans le jeu Mojette de la section 1.2.1 ou alors sous forme de contrainte de positivité) ou ajouter des projections.

Ce principe intuitif a été mis en application dans le premier scanner médical, dont nous allons exposer à présent le fonctionnement.

1.3 Premier algorithme dans un scanner médical

Le premier scanner médical a été conçu par G. N. Hounsfield en 1972, dont les travaux sont financés par la société britannique EMI produisant entre autres les *Beatles*. Ce scanner, appelé *Computerized transverse Axial Tomography* (CAT) en anglais et *tomodensitomètre* (TDM) en français dans sa traduction officielle, est à l'époque destiné à observer le cerveau [92].

1.3.1 L'invention du premier scanner

Bien qu'aucune référence n'y soit faite dans l'article fondateur de G. N. Hounsfield, A. M. Cormack avait déjà décrit un tel système dix ans auparavant [34, 35]. A. M. Cormack et G. N. Hounsfield recevront conjointement le prix Nobel de physiologie ou médecine en 1979.

Ce premier scanner dispose d'un mini-ordinateur sur lequel un algorithme de reconstruction tomographique algébrique est utilisé pour reconstruire les sections transverses de cerveau à partir des projections mesurées par rayons X à plusieurs incidences différentes. Cet algorithme s'appelle Algebraic Reconstruction Technique (ART) [65, 66], il a été développé par R. Gordon, R. Bender *et al.* en 1970 et introduit à la section 1.2.2.

1.3.2 Algorithme ART

Les méthodes de résolution algébriques — dont ART fait partie — reposent sur une représentation continue-discrète de l'espace, c'est-à-dire que l'on considère une image composée de pixels, donc discrète, mais de lignes de projections continues (en matière de traversée de pixels et en termes d'angulation). Nous souhaitons reconstruire une image numérique — donc discrète — I de taille $W \times H$. Chaque rayon ρ intersecte le pixel (i, j) avec un poids $\omega^{\rho}_{i,j}$. En linéarisant la formule 1.3 dans le cas des rayons X, on modélise la valeur d'un bin sur la projection $P(\theta, \rho)$ de direction θ par une combinaison linéaire des valeurs de chaque pixel (i, j) pondérées par les $\omega^{\theta,\rho}_{i,j}$:

$$P_\theta(\rho) = \sum_{(i,j)\in rayon(\rho)} \omega^{\theta,\rho}_{i,j} I(i,j) \tag{1.4}$$

$$= \sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} \omega^{\theta,\rho}_{i,j} I(i,j). \tag{1.5}$$

Si l'on considère à présent un ensemble de N_θ projections, chacune composée de N_ρ rayons, on peut modéliser l'ensemble des projections et des contraintes du système tomographique par l'équation matricielle :

$$RI = P, \tag{1.6}$$

où P est un vecteur de taille $N_\theta N_\rho$ correspondant aux projections mesurées, I est l'image à reconstruire représentée sous forme de vecteur de taille WH et R est la matrice de taille $N_\theta N_\rho \times WH$ des poids $\omega^{\theta,\rho}_{i,j}$, appelée *matrice système*.

Reconstruire l'image I à partir des projections P revient à inverser le système (1.6). En théorie,

$$I \approx R^\dagger P, \tag{1.7}$$

où $R^\dagger$ désigne une matrice pseudo-inverse de R, c'est-à-dire telle que $\|R^\dagger P - I\|_2$ soit minimal.

Dans la réalité, cet inverse (ou pseudo-inverse dans un cadre plus général) est très complexe à déterminer avec des méthodes d'inversion directes étant donné que

R est de très grande taille. Par exemple pour une image de 128×128 pixels avec 60 projections de 128 échantillons, R comporte 125 829 120 entrées !

R. Gordon, R. Bender *et al.* proposent alors un schéma itératif permettant de construire des approximations successives de la solution $I^{(0)}, I^{(1)}, \ldots, I^{(n)}$ convergeant vers I au sens des moindres carrés. Il s'avère que cette technique, de manière semble-t-il fortuite, correspond presque exactement à la méthode de S. Kaczmarz [96] utilisée en calcul numérique pour résoudre les systèmes linéaires du type $Ax = b$.

À chaque nouvelle itération $k+1$ de ART, l'image estimée à l'itération précédente $I^{(k)}$ est mise à jour de manière à satisfaire une des équations l du système (1.6). Elle est obtenue en rétroprojetant dans l'image $I^{(k)}$ la différence normalisée entre la projection de $I^{(k)}$ et celle de départ. Soit, en reprenant les notations initiales :

$$I^{(k+1)}(i,j) = I^{(k)}(i,j) + \omega_{i,j}^{\theta_k,\rho} \frac{P_{\theta_k}(\rho) - P_{\theta_k}^{(k)}(\rho)}{\sum_{i=0}^{W-1} \sum_{j=0}^{H-1} (\omega_{i,j}^{\theta_k,\rho})^2}. \tag{1.8}$$

Le choix de la condition initiale $I^{(0)}$ peut être libre, mais influence la convergence de l'algorithme. Un choix courant est d'initialiser $I^{(0)}$ à une image uniforme, chaque pixel recevant la moyenne des sommes des bins sur les projections normalisées par le nombre de pixels total dans l'image [87].

Après un certain nombre n d'itérations, l'image en cours de reconstruction $I^{(n)}$ est jugée suffisamment proche de l'image idéale I : $I^{(n)} \approx I$.

1.4 Conclusion

La tomographie est présente dans de nombreux domaines très différents, que ce soit pour produire des images ou tout simplement traiter de l'information. Les enjeux de la tomographie sont donc d'importance pour de larges communautés scientifiques.

L'algorithme algébrique ART produit toujours une solution quel que soit le nombre de projections, mais plus on a de projections et mieux elles sont réparties directionnellement, plus on va s'approcher de *la bonne*[6] solution.

À travers les exemples de la section 1.1, nous avons mis en évidence quelques questions fondamentales et défis de la tomographie. À savoir, de manière non exhaustive :

— l'influence du nombre des projections et de la répartition angulaire des projections ;

— le nombre de pixels pouvant être reconstruits en fonction de la résolution souhaitée ;

— l'influence de la quantification des pixels (c'est-à-dire le nombre de niveaux de gris possibles), etc.

Pour tenter de répondre à ces questions, il apparaît comme indispensable d'inscrire le problème de reconstruction tomographique dans un cadre mathématique plus formel. Cet effort sera l'objet des deux prochains chapitres.

6. Encore faudrait-il définir ce qualificatif, et s'assurer de son unicité. Il dépend fortement du domaine d'application et des propriétés que l'on désire assurer à partir de l'information *a priori* que l'on possède comme nous le verrons par la suite.

Chapitre 2

Tomographie discrète

L'objectif de ce chapitre est de mettre en évidence les difficultés liées à la discrétisation de l'opérateur de projection et l'incomplétude des données due au caractère discret de l'information mesurée et de son traitement numérique. Ainsi, nous présentons dans un premier temps la théorie de Radon continue, puis discrétisée et les problèmes soulevés. Nous montrons ensuite dans quelle mesure la tomographie discrète peut répondre à ces problématiques. En particulier, nous présentons la transformée Mojette qui, grâce à un échantillonnage optimal, permet de concilier tomographie classique et tomographie discrète.

Sommaire

2.1 Introduction

Nous avons vu dans le chapitre précédent la définition de la tomographie et ses champs d'application. La théorie développée et formulée mathématiquement dans le domaine continu est aujourd'hui mise à l'épreuve face, d'une part, au traitement informatique des données et, d'autre part, au mode d'acquisition des données. En effet, l'essence même du calcul numérique impose une discrétisation des données et des étapes du calcul algorithmique. Le problème que soulève cette discrétisation est double : non seulement l'échantillonnage imposé doit respecter les conditions physiques de l'acquisition mais il doit également respecter les conditions mathématiques d'application de la théorie.

Face à ce problème, de nombreux travaux basés sur la théorie des ensembles finis et des grilles discrètes [53, 54, 98, 115] ou de l'algèbre binaire [105, 141] ont mené à l'établissement d'une nouvelle théorie de la tomographie dite *tomographie discrète* [84]. Mais réduire la tomographie discrète à la simple transcription informatique des formules analytiques de l'inversion de la transformée de Radon est une erreur conceptuelle. Le terme *discret* peut désigner aussi bien un nombre *fini* de projections acquises — qui rappelons-le doit être théoriquement infini dans le cadre de la tomographie usuelle — tout comme des données quantifiées sur un ensemble de valeurs fini ou dénombrable, voire même jusqu'à la limite critique de la quantification binaire. La tomographie discrète est donc un cadre théorique permettant de résoudre de façon exacte les problèmes de reconstruction tomographique à partir de données échantillonnées et quantifiées grossièrement sur les projections et sur le nombre de projections.

Dans ce chapitre, nous nous efforcerons de présenter dans un premier temps les versions discrètes des algorithmes de reconstruction tomographique dites classiques. Dans un second temps, nous présentons le cas d'une acquisition à angle limité et les problèmes soulevés, qui sont résolus par la tomographie discrète. Enfin, nous présenterons la tomographie binaire et ses applications.

2.2 Projections acquises uniformément sur le domaine complet [0,180°[

Un premier pas dans le développement de méthodes discrètes est, comme en traitement du signal, d'échantillonner le signal continu. En effet, un signal échantillonné (discret) peut, sous certaines conditions, préserver les caractéristiques du signal continu et donc représenter fidèlement le signal continu sous-jacent [148]. Il en va de même pour les techniques de reconstruction que l'on va présenter dans cette section.

Si ce moyen de discrétisation peut sembler trop abrupt au premier abord, il nous faut garder à l'esprit que sa validité et ses limites dépendent des conditions expérimentales qui peuvent être favorables. De plus, considérer le modèle continu permet de modéliser précisément le processus d'acquisition, de la physique à la géométrie.

Afin d'aller plus avant, nous allons maintenant exposer les bases théoriques de la tomographie dans le domaine continu.

2.2.1 Formulation du problème dans le domaine continu

Nous avons vu au chapitre 1 que les opérateurs de projection et de rétroprojection étaient les éléments de base de la tomographie. Nous en avons donné des formulations intuitives basées sur la sommation de cases dans une grille. Ces éléments ont été étudiés en détail par les mathématiciens et physiciens d'après les travaux théoriques fondateurs du mathématicien autrichien J. Radon en 1917 [133] qui a posé les fondements mathématiques.

Formellement, l'objet à projeter et reconstruire est assimilé à une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les trois propriétés idéales de régularité suivantes :

1. La fonction f est continue sur son domaine de définition ;
2. L'intégrale de f pondérée par le module de chaque point

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\, dy$$

converge absolument ;

3. Pour tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $r \geq 0$, soit $\overline{f_{(x,y)}}(r)$ la moyenne de f le long du cercle de centre (x, y) et de rayon r :

$$\overline{f_{(x,y)}}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r\cos\phi, y + \sin\phi)\, d\phi,$$

alors

$$\lim_{r \to +\infty} \overline{f_{(x,y)}}(r) = 0, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Une *ligne intégrale* de f est l'intégrale curviligne de f le long d'une droite $\mathcal{D}_{\rho,\phi}$ d'équation $\mathcal{D}_{\rho,\phi} : x\cos\phi + y\sin\phi = \rho$, formant un angle ϕ avec l'axe des ordonnées et à une distance $|\rho|$ de l'origine :

$$p(\rho, \phi) = p(-\rho, \pi + \phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho\cos\phi - s\sin\phi, \rho\sin\phi + s\cos\phi)\, ds. \tag{2.1}$$

L'ensemble des lignes intégrales $p(\cdot, \phi)$ pour un angle ϕ fixé est appelé une *projection* d'angle ϕ, que l'on notera p_ϕ. De plus, on appellera *espace de* Radon ou *sinogramme* l'espace $(\rho, \phi) \mapsto p(\rho, \phi)$.

Les trois théorèmes suivant définissent la transformée de Radon, les conditions de validité et donnent une formule de reconstruction [133].

Théorème 2.1. L'intégrale (2.1) existe presque partout. On appelle opérateur de Radon ou transformée de Radon l'opérateur

$$\mathcal{R} : f \mapsto p \tag{2.2}$$

que l'on note également $p = \mathcal{R}f$.

Théorème 2.2. Soit $\overline{p_{(x,y)}}(q)$ la moyenne de $p(\rho, \phi)$ pour les tangentes au cercle de centre (x, y) de rayon $q \geq 0$:

$$\overline{p_{(x,y)}}(q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x\cos\phi + y\sin\phi + q, \phi)\, d\phi. \tag{2.3}$$

Alors cette intégrale converge en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et quel que soit le rayon q.

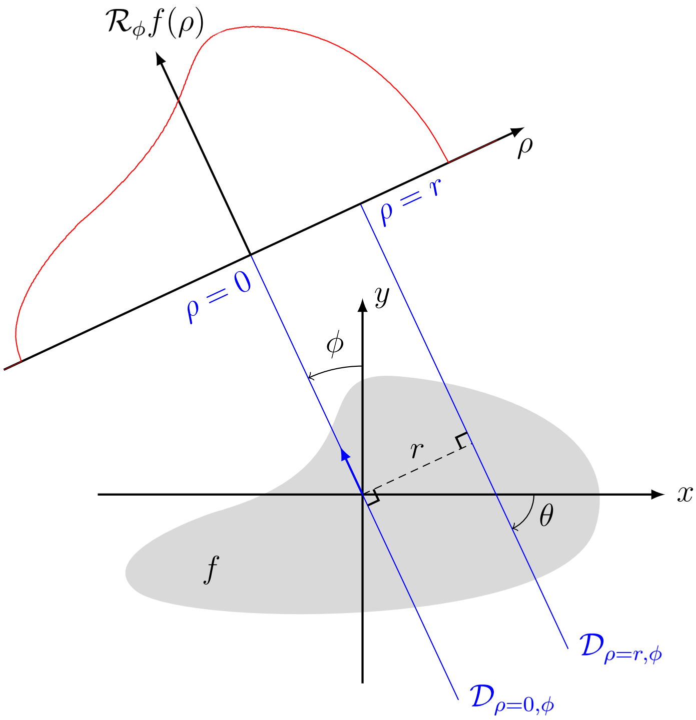


FIGURE 2.4 – Une projection d'angle ϕ

Théorème 2.3. La fonction f est déterminée de manière unique à partir de p par la formule :

$$f(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{d\overline{p_{(x,y)}}(q)}{q} \tag{2.4}$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{\overline{p_{(x,y)}}(\varepsilon)}{\varepsilon} - \int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\overline{p_{(x,y)}}(q)}{q^2}\,dq\right). \tag{2.5}$$

Le théorème 2.1 formalise la notion de projection dans le domaine continu, à l'instar de l'opérateur de projection discrète vu au chapitre 1. Il en assure également la validité pour des fonctions vérifiant les hypothèses précédentes.

Le théorème 2.2 formalise quant à lui pour $q = 0$ la notion de rétroprojection dans le domaine continu, tout comme de l'opérateur de rétroprojection discrète vu au chapitre 1 et en assure la validité.

Enfin, le théorème 2.3 exhibe une formule d'inversion de l'opérateur. C'est un résultat fort car il signifie que l'opérateur inverse $\mathcal{R}^{-1}$ est réalisable en théorie. La deuxième forme de l'intégrale relève également une singularité de l'opérateur inverse. Cette singularité est la principale difficulté de la reconstruction tomographique car il rend l'opérateur inverse instable et le problème de reconstruction tomographique *mal posé*. Le lecteur intéressé pourra se référer à la première partie de [71] pour un état de l'art complet sur la (dis-)continuité de l'opérateur de RADON inverse $\mathcal{R}^{-1}$.

2.2.1.1 Théorème de la tranche centrale

La formule d'inversion directe du théorème 2.3 n'est pas pratique car elle présente une discontinuité. Nous pouvons la reformuler en utilisant le théorème de la tranche centrale, qui lie la transformée de FOURIER unidimensionnelle d'une projection de f à une tranche de la transformée de FOURIER bidimensionnelle de l'objet f [25].

Définition 2.5 (Transformée de FOURIER continue unidimensionnelle)**.** La *transformée de* FOURIER *1D*, notée $\mathcal{F}_{\text{1D}}(\cdot)$ d'une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{1D}}(f) : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ \nu &\mapsto \hat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu t}\, dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Cette intégrale est convergente et on note indifféremment $\mathcal{F}_{\text{1D}}(f)(\nu)$ ou $\hat{f}(\nu)$ la transformée de FOURIER de f à la *fréquence* ν.

De plus, cette transformée est inversible et on note $\mathcal{F}_{\text{1D}}^{-1}(\cdot)$ la transformée de FOURIER inverse telle que :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{1D}}^{-1}\left(\hat{f}\right) : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu)\, \mathrm{e}^{2i\pi\nu t}\, dt. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Définition 2.6 (Transformée de FOURIER continue bidimensionnelle)**.** La *transformée de* FOURIER *2D*, notée $\mathcal{F}_{\text{2D}}(\cdot)$ d'une fonction f intégrable sur le plan $\mathbb{R}^2$

est définie par :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{2\mathrm{D}}\left(f\right) : (\mathbb{R}\times\mathbb{R}) &\to \mathbb{C}\\ (\lambda,\mu) &\mapsto \hat{f}(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-2i\pi(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Cette intégrale est convergente et on note indifféremment $\mathcal{F}_{2\mathrm{D}}\left(f\right)(\lambda,\mu)$ ou $\hat{f}(\lambda,\mu)$ la transformée de FOURIER de f aux fréquences (λ,μ).

De plus, cette transformée est inversible et on note $\mathcal{F}_{2\mathrm{D}}^{-1}\left(\cdot\right)$ la transformée de FOURIER inverse telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{2\mathrm{D}}^{-1}\left(\hat{f}\right) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\to \mathbb{C}\\ (x,y) &\mapsto f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda,\mu)\,\mathrm{e}^{2i\pi(\lambda x+\mu y)}\,d\lambda\,d\mu.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Écrivons maintenant la transformée de FOURIER 2D de f :

$$\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \mathcal{F}_{2\mathrm{D}}\left(f\right)(\lambda,\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-2i\pi(\lambda x+\mu y)}\,dx\,dy. \tag{2.10}$$

La droite $\mathcal{D}_\phi^\perp$ passant par l'origine et formant un angle ϕ avec l'axe des abscisses peut être paramétrée par :

$$\begin{cases} x(t) = t\cos\phi \\ y(t) = t\sin\phi \end{cases},\ t\in\mathbb{R}. \tag{2.11}$$

En évaluant l'équation (2.10) sur $\mathcal{D}_\phi^\perp$:

$$\mathcal{F}_{2\mathrm{D}}\left(f\right)(\lambda,\mu)_{|\lambda=t\cos\phi,\mu=t\sin\phi} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{e}^{-2i\pi t(x\cos\phi+y\sin\phi)}\,dx\,dy. \tag{2.12}$$

Étudions à présent la transformée de FOURIER d'une projection d'angle ϕ par rapport à la variable ρ :

$$\forall \nu \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{F}_{1\mathrm{D}}\left(p_\phi\right)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\phi(\rho)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu\rho}\, d\rho \tag{2.13}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho\cos\phi - s\sin\phi, \rho\sin\phi + s\cos\phi)\, ds\right] \mathrm{e}^{-2i\pi\nu\rho}\, d\rho \tag{2.14}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\rho\cos\phi - s\sin\phi, \rho\sin\phi + s\cos\phi)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu\rho}\, ds\, d\rho. \tag{2.15}$$

On effectue le changement de variable :

$$\begin{cases} \rho = x\cos\phi + y\sin\phi \\ s = -x\sin\phi + y\cos\phi \end{cases} \quad \text{et } \det(J_{x,y}) = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{vmatrix} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1. \tag{2.16}$$

$$\mathcal{F}_{1\mathrm{D}}\left(p_\phi\right)(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, \mathrm{e}^{-2i\pi\nu(x\cos\phi + y\sin\phi)}\, dx\, dy. \tag{2.17}$$

Les équations (2.12) et (2.17) permettent d'énoncer le théorème suivant.

Théorème 2.7 (Théorème de la tranche centrale [25] [1])**.** Soit p_ϕ la projection de f d'angle ϕ fixé. La transformée de Fourier 1D de p_ϕ est égale à la tranche orthogonale d'angle $\phi + \frac{\pi}{2}$ de la transformée de Fourier 2D de l'objet f passant par l'origine :

$$\forall \nu \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}_{1\mathrm{D}}\left(p_\phi\right)(\nu) = \mathcal{F}_{2\mathrm{D}}\left(f\right)(\nu\cos\phi, \nu\sin\phi). \tag{2.18}$$

Ce théorème est extrêmement puissant car il permet :

— de définir des méthodes d'inversion de la transformée de Radon en remplissant l'espace fréquentiel 2D de $\hat{f}$ à partir des transformées de Fourier des projections $\widehat{p_\phi}$;

1. Bien que ce théorème soit généralement attribué à R. N. Bracewell, celui-ci a déclaré qu'il n'avait fait qu'énoncer un résultat bien connu en séismologie.

— d'étudier les conditions d'échantillonnage angulaire et de discrétisation de la tomographie comme nous le verrons par la suite.

2.2.1.2 Rétroprojection filtrée idéale

Une conséquence directe du théorème de la tranche centrale est la méthode de la rétroprojection filtrée. Cette méthode est plus pratique que de remplir les tranches directement dans l'espace de FOURIER car elle se présente sous forme d'algorithme parallélisable, chaque projection pouvant être traitée indépendamment des autres.

Avec l'aide de la transformée de FOURIER inverse, nous pouvons exprimer f par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\lambda,\mu)\,\mathrm{e}^{2i\pi(\lambda x+\mu y)}\ d\lambda\, d\mu. \tag{2.19}$$

Effectuons un changement de variable pour passer les fréquences spatiales en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \lambda = \nu\cos\phi \\ \mu = \nu\sin\phi \end{cases} \quad \text{et}\ \det(J_{\nu,\phi}) = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\nu\sin\phi \\ \sin\phi & \nu\cos\phi \end{vmatrix} = \nu(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = \nu \tag{2.20}$$

$$f(x,y) = \int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\nu\cos\phi,\nu\sin\phi)|\nu|\,\mathrm{e}^{2i\pi(x\nu\cos\phi+y\nu\sin\phi)}\ d\nu d\phi. \tag{2.21}$$

Et grâce au théorème de la tranche centrale, nous pouvons identifier les échantillons $\hat{f}(\nu\cos\phi,\nu\sin\phi)$ à $\widehat{p_\phi}(\nu)$, d'où :

$$f(x,y) = \int_0^{\pi} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p_\phi}(\nu)|\nu|\,\mathrm{e}^{2i\pi\nu(x\cos\phi+y\sin\phi)}\ d\nu}_{q(\phi,\rho=x\cos\phi+y\sin\phi)}\, d\phi. \tag{2.22}$$

La convolution dans le domaine spatial étant équivalente à une multiplication dans le domaine de Fourier, nous pouvons écrire :

$$q_\phi(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{p_\phi}(\nu)|\nu|\, \mathrm{e}^{2i\pi\rho\nu}\, d\nu \tag{2.23}$$

$$= \mathcal{F}_{1\mathrm{D}}^{-1}\left(\hat{p_\phi}(\nu)|\nu|\right)(\rho) \tag{2.24}$$

$$= \left(p_\phi * \mathcal{F}_{1\mathrm{D}}^{-1}\left(|\nu|\right)\right)(\rho), \tag{2.25}$$

où $*$ représente la convolution de deux signaux continus.

q_ϕ est alors la projection d'angle ϕ convoluée avec un filtre dont la transformée de Fourier est la fonction valeur absolue. Le graphe de ce filtre forme une rampe dans le domaine de Fourier, c'est pourquoi ce filtre est connu sous l'appellation *filtre rampe*. Le terme q_ϕ est appelé *projection filtrée*.

Enfin, f apparaît comme une intégration de toutes les projections filtrées :

$$f(x, y) = \int_0^\pi q\left(x\cos\phi + y\sin\phi, \phi\right)\, d\phi. \tag{2.26}$$

L'équation $\rho = x\cos\phi + y\sin\phi$ correspond à la droite de projection dans la transformée de Radon. Ce qui veut dire que dans l'équation (2.26), on somme pour chaque pixel (x, y) les valeurs de $q(\rho, \phi)$ correspondant à la ligne de projection d'angle ϕ et passant par (x, y).

L'opérateur qui à q associe f d'après l'équation (2.26) est appelé *rétroprojection*. Dans la suite du manuscrit, nous emploierons abusivement ce terme pour désigner soit :

— la rétroprojection d'une seule projection d'angle ϕ :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \phi \in [0, \pi[,\ f(x, y) = q_\phi(x\cos\phi + y\cos\phi); \tag{2.27}$$

— l'opérateur de rétroprojection au sens propre, qui correspond à la sommation de la rétroprojection de tous les angles :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \int_0^\pi q(x\cos\phi + y\cos\phi, \phi)\, d\phi. \tag{2.28}$$

Dans ce sens là, cet opérateur est un opérateur dual à la transformée de

RADON, c'est même strictement l'opérateur *adjoint*, que nous définirons par la suite.

Notons ici qu'il est facile de voir le rapprochement entre cette définition de rétroprojection continue et celle de la rétroprojection discrète présentée au chapitre précédent.

Nous voyons que dans des conditions idéales de données continues complètes, il est possible de reconstruire l'objet f en filtrant chaque projection par un filtre rampe, puis en la rétroprojetant dans l'espace image. Cette méthode est appelée *rétroprojection des projections filtrées*, ou plus simplement rétroprojection filtrée, largement connue en reconstruction tomographique sous l'acronyme FBP (*Filtered Back-Projection*).

2.2.2 Discrétisation du problème continu

Dans la section précédente, nous présentions les bases de la reconstruction tomographique en étudiant le problème sous sa forme complètement continue, et avec des mesures complètes. Ce modèle idéal n'est pas réalisable en pratique, car il suppose que chaque projection soit connue dans son intégralité (projection continue) et que l'on dispose d'une infinité de projections couvrant tout le cercle (ou demi-cercle en utilisant les symétries).

En pratique, les systèmes d'acquisition tomographique ne permettent d'acquérir qu'un nombre fini de projections, et chaque projection est composée d'un nombre fini d'échantillons (qu'on nommera désormais *bins* en accord avec l'usage du chapitre précédent). La discrétisation a ainsi lieu à deux niveaux :

Sur chaque projection Nous ne connaissons pas toute la projection mais seulement des échantillons (qui plus est, des échantillons sur les lignes radiales). Les échantillons se présentent donc dans l'espace de FOURIER sous forme de cercles concentriques.

Sur le nombre de projections Les projections sont connues uniquement à certains angles, en nombre fini. L'espace de FOURIER est alors connu non plus sur des cercles concentriques mais seulement sur certains points de ceux-ci.

Dans la suite, lorsque nous parlerons de *transformée de* Radon *discrétisée*, nous entendons un échantillonnage de la transformée de Radon continue, avec :

— un nombre N_ϕ de projections régulièrement distribuées d'angle $\phi_i = i\frac{\pi}{N_\phi}$, pour $i \in [0 \ldots N_\phi - 1]$;

— un nombre N_ρ d'échantillons sur chaque projection, espacés d'un pas Δ_ρ.

Nous allons maintenant voir l'effet de ces discrétisations sur les méthodes analytiques puis itératives.

2.2.2.1 Analyse spectrale dans le domaine discret

Les projections étant maintenant données par un signal discret et non plus un signal continu, nous ne pouvons utiliser les transformées de Fourier continues. En lieu et place, nous allons utiliser les transformées de Fourier discrètes.

Définition 2.8 (Transformée de Fourier discrète unidimensionnelle)**.** La *transformée de* Fourier *discrète 1D*, notée $\mathrm{TFD_{1D}}(\cdot)$ d'un signal discret s de N échantillons est définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{TFD_{1D}}(s) : [0 \ldots N-1] &\to \mathbb{C} \\ u &\mapsto \hat{s}[u] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n]\, \mathrm{e}^{-2i\pi n \frac{u}{N}}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

On note indifféremment $\mathrm{TFD_{1D}}(s)[u]$ ou $\hat{s}[u]$, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, la transformée de Fourier discrète de s à la *fréquence discrète* $\frac{u}{N}$.

Cette transformée est inversible et on note $\mathrm{TFD_{1D}^{-1}}(\cdot)$ la transformée de Fourier discrète inverse telle que :

$$\begin{aligned} \mathrm{TFD_{1D}^{-1}}(\hat{s}) : [0 \ldots N-1] &\to \mathbb{C} \\ n &\mapsto s[n] = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \hat{s}[u]\, \mathrm{e}^{2i\pi n \frac{u}{N}}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Définition 2.9 (Transformée de Fourier discrète bidimensionnelle)**.** La *transformée de* Fourier *discrète 2D*, notée $\mathrm{TFD_{2D}}(\cdot)$ d'un signal discret s de $M \times N$

échantillons est définie par :

$$\begin{aligned}\mathrm{TFD}_{2\mathrm{D}}(s) : [0\dots M-1]\times[0\dots N-1] &\to \mathbb{C}\\ (u,v) &\mapsto \hat{s}[u,v] = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} s[m,n]\,\mathrm{e}^{-2i\pi\left(m\frac{u}{M}+n\frac{v}{N}\right)}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

On note indifféremment $\mathrm{TFD}_{2\mathrm{D}}(s)[u,v]$ ou $\hat{s}[u,v]$, lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité, la transformée de Fourier discrète 2D de s à la *fréquence discrète* $\left(\frac{u}{M},\frac{v}{N}\right)$.

Cette transformée est inversible et on note $\mathrm{TFD}_{2\mathrm{D}}^{-1}(\cdot)$ la transformée de Fourier discrète inverse telle que :

$$\begin{aligned}\mathrm{TFD}_{2\mathrm{D}}^{-1}(\hat{s}) : [0\dots M-1]\times[0\dots N-1] &\to \mathbb{C}\\ (m,n) &\mapsto s[m,n] = \frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} \hat{s}[u,v]\,\mathrm{e}^{2i\pi\left(m\frac{u}{M}+m\frac{v}{N}\right)}.\end{aligned} \tag{2.32}$$

2.2.2.2 Méthode de Fourier

On considère maintenant que f est à support borné carré $[-D,D]\times[-D,D]$. Dans le problème discret, nous souhaitons seulement reconstruire f sur un ensemble fini de points : $\tilde{f}(k,l) = f(x_k,y_l)$.

Soit f un objet à étudier et les échantillons des projections $p(\rho_k,\phi_l)$ obtenus avec la transformée de Radon discrétisée de f avec :

$$\begin{aligned}\forall k \in \left[\left\lfloor -\frac{N_\rho-1}{2}\right\rfloor \dots \left\lfloor \frac{N_\rho-1}{2}\right\rfloor\right],\ \rho_k = k\sigma_\rho\\ \forall l \in [0\dots N_\phi],\ \phi_k = l\sigma_\phi.\end{aligned} \tag{2.33}$$

Contrairement aux projections continues, une projection discrète ne permet d'estimer la transformée de Fourier de f que sur un nombre fini de points. En effet, en utilisant la transformée de Fourier discrète des projections et l'équation (2.18), on obtient :

$$\mathrm{TFD}_{1\mathrm{D}}(p_{\phi_l})(s) \approx \frac{1}{\sigma_\rho}\mathcal{F}_{2\mathrm{D}}(f)(s\cos\phi_l, s\sin\phi_l). \tag{2.34}$$

Notons ici qu'il ne s'agit que d'une approximation. Si les conditions d'échantillonnage de SHANNON sont respectées, ce qui est impossible en totalité en théorie mais on peut se trouver dans des conditions proches en pratique, cette formule produit une bonne approximation. Il est donc possible de connaître la transformée de FOURIER de f sur l'ensemble de points du plan de FOURIER $\{(\lambda_{sl}, \mu_{sl}) = (s\cos\phi_l, s\sin\phi_l)\}$.

Malheureusement, comme le montre la figure 2.10, ces points sont disposés sur une grille polaire et non sur une grille cartésienne. Bien qu'il soit théoriquement possible d'inverser la transformée de FOURIER discrète sur grille polaire, ce n'est pas souhaitable en pratique car il n'existe pas de méthode rapide en $O(N \log N)$ comme pour les grilles cartésiennes. La solution alors souvent adoptée est d'interpoler la grille polaire à une grille cartésienne pour l'inverser de manière séparable, en particulier avec la transformée de FOURIER rapide ou FFT [2] inverse. L'image reconstruite est donc une image discrète $\tilde{f}$.

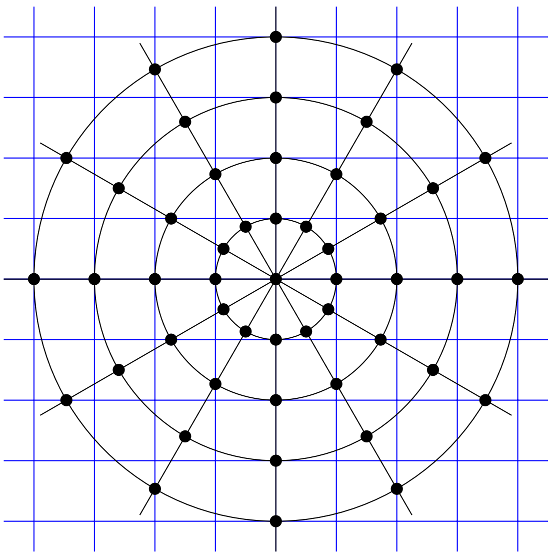


FIGURE 2.10 – Échantillonnage polaire du plan de FOURIER pour les méthodes de reconstruction basées sur le théorème de la tranche centrale

Pour résumer, les étapes de la méthode de reconstruction de FOURIER sont :

1. Calculer la transformée de FOURIER discrète de chaque projection ;
2. Remplir une grille polaire du plan de FOURIER de f avec les échantillons calculés à l'étape précédente ;

2. *Fast* FOURIER *Transform*

3. Interpoler la grille polaire sur une grille cartésienne ;
4. Calculer la transformée de FOURIER bidimensionnelle inverse pour obtenir des échantillons de f sur une grille cartésienne.

Un cas particulier d'utilisation notable de cet algorithme de reconstruction est l'IRM, où les données sont directement acquises dans l'espace de FOURIER. Dans cette configuration, on se retrouve directement à l'étape 3 voire l'étape 4 dans le cas le plus simple. On possède alors les véritables échantillons des composantes fréquentielles, et non une approximation.

Hormis ce dernier cas, cette méthode n'est pas beaucoup utilisée en pratique du fait de ses nombreuses limitations. La première limitation concerne l'approximation des échantillons de la transformée de FOURIER continue par ceux de la transformée de FOURIER discrète (équation (2.34) et FFT inverse). En réalité, ces étapes sont entachées d'erreurs dues au repliement de spectre à cause de l'échantillonnage des projections d'une part, et de l'échantillonnage de $\tilde{f}$ d'autre part, qui ne peuvent être à bande limitée.

La seconde limitation, et la majeure, est due à l'interpolation de la grille polaire à la grille cartésienne dans le domaine de FOURIER. Le problème rencontré ici est dû à la densité de l'échantillonnage polaire, qui est plus importante dans les basses fréquences que dans les hautes fréquences. Intuitivement, les hautes fréquences qui contiennent les détails de l'image sont donc beaucoup moins bien reconstruites que les basses fréquences, qui sont, pour leur part, estimées à partir de suffisamment de points. Il est intéressant de remarquer que cette étape d'interpolation apparaît implicitement dans la formule continue de la rétroprojection filtrée, $|\nu|$ étant le jacobien de passage d'une grille polaire à une grille cartésienne.

Comme cette seconde limitation semble être la plus importante, quelques tentatives pour améliorer le processus d'interpolation ont été proposées dans la littérature. Nous pouvons les classer en deux catégories :

— l'utilisation une méthode d'interpolation plus précise ;

— l'utilisation d'autres points d'échantillonnage rendant l'interpolation inutile.

Pour la première catégorie, J. WALDEN propose un cadre théorique pour comparer quantitativement les méthodes d'interpolation dans le plan de FOURIER et préconise une interpolation par fenêtre de Kaiser-Bessel [173].

La seconde catégorie nous semble plus judicieuse car elle s'attaque aux causes du problème. Ici encore, plusieurs stratégies sont envisagées. Une première stratégie est de tenter d'inverser la transformée de Fourier directement sur la grille polaire, donc de travailler directement sur la transformée inverse, à l'aide de la *transformée de* Fourier *non-uniforme* (NUFT) [45, 51]. Une autre alternative consiste à utiliser les expansions en séries de Fourier [67].

Enfin, d'autres auteurs proposent de modifier le protocole d'acquisition des images, donc la discrétisation de la transformée de Radon, pour obtenir des échantillons dans le plan fréquentiel qui ne sont plus disposés sur une grille polaire, mais une grille pseudo-polaire. Cette méthode porte le nom de *méthode du linogramme* [46, 47, 112]. Cette méthode retient notre attention car elle propose d'adapter le pas d'échantillonnage des projections en fonction de l'angle de projection, tout comme la transformée Mojette que nous allons voir ensuite. Les données ainsi acquises forment un échantillonnage pseudo-polaire, qu'il est possible de ramener sur une grille cartésienne sans interpolation [10]. Ces techniques se retrouvent également dans une méthode de reconstruction similaire — appelée *Equally Sloped Tomography* — consistant à considérer un ensemble de directions de projections définies par incréments de pente, donc à incrément constant de la tangente, produisant le même échantillonnage pseudo-polaire de l'espace de Fourier [116].

2.2.2.3 Rétroprojection filtrée

Une alternative à la méthode de Fourier, fournie par l'équation (2.26), est de filtrer chaque projection par un filtre rampe, puis de la rétroprojeter. C'est l'algorithme de la rétroprojection filtrée ou FBP.

Grâce à sa simplicité de mise en œuvre, c'est encore de nos jours l'algorithme le plus usité dans le monde. Malgré tout, sa mise en œuvre sur des données discrètes requiert quelques précautions. En effet, le filtre rampe est infini et sa réalisation partielle induit donc des oscillations. De plus, le gain du filtre rampe étant proportionnel à la fréquence, celui-ci atténue les basses fréquences et privilégie les hautes fréquences. Ce comportement est incompatible avec des conditions d'acquisition bruitées, où le bruit est essentiellement localisé dans les hautes fréquences et se retrouve donc amplifié. Enfin, le fait que la valeur du filtre dans le domaine de Fourier à la fréquence $\nu = 0$ soit nulle élimine la valeur moyenne des projections.

Pour répondre aux deux premiers problèmes, il est d'usage dans la littérature d'utiliser une fenêtre d'*apodisation*, qui atténue le gain du filtre à partir d'une certaine fréquence. L'expression du fréquentielle du filtre est donc :

$$\hat{h}(\nu) = \hat{a}(\nu)|\nu|, \tag{2.35}$$

où $\hat{a}(\nu)$ est la fenêtre d'apodisation.

Il existe de nombreuses fenêtres d'apodisation que l'on peut utiliser. La plus simple, proposée par Ramachandran et Lacksminarayanan et couramment appelée Ram-Lak consiste à couper le spectre à partir d'une certaine fréquence. Les autres fenêtres (Shepp-Logan, Hann, Hamming, etc.) visent à éviter la discontinuité produite par la fenêtre de Ram-Lak en amenant plus progressivement le gain du filtre rampe à une valeur nulle, comme le montre la figure 2.11.

La discrétisation directe de ces filtres par simple échantillonnage conduit toujours à $F(\nu = 0) = 0$ et donc à la perte de la valeur moyenne du signal. Ce problème est résolu en utilisant non pas une version discrétisée de la transformé de Fourier du filtre, mais la transformée de Fourier discrète du filtre spatial discrétisé [97]. Cette implémentation est la preuve qu'une discrétisation naïve du continu par simple échantillonnage n'est généralement pas équivalente à un paradigme intégralement discret.

Dans ce sens, il nous semble important de citer les travaux de J. Guédon et Y. Bizais ainsi que ceux de S. Horbelt, M. Liebling *et al.* qui tentent de tenir compte de la nature réellement discrète des données pour proposer un algorithme de rétroprojection filtrée discret [74, 77, 91]. Dans [77] et [74], les auteurs proposent une modélisation de l'image discrète par une base de fonctions B-spline de degré zéro, aussi appelées fonctions de Haar. Ce travail est largement étendu dans [91], où les auteurs proposent en plus de modéliser les projections sur des bases de fonctions

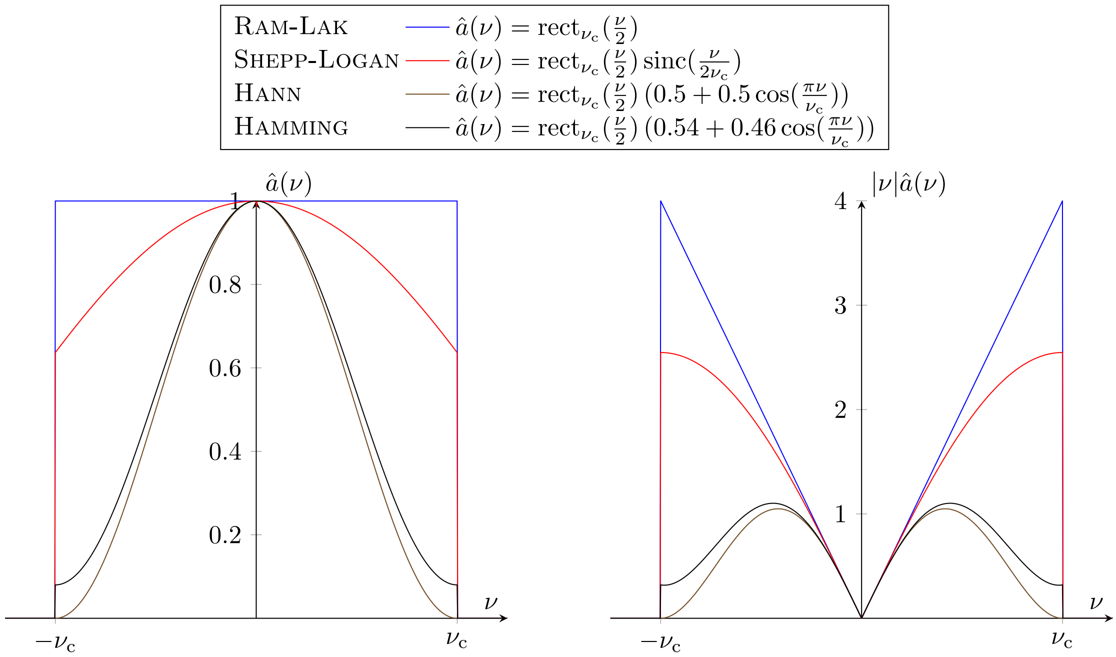


Figure 2.11 – Fenêtres d'apodisation (à gauche) et filtres de reconstruction correspondants (à droite)

B-spline et d'effectuer une discrétisation optimale au sens des moindres carrés, au lieu d'un échantillonnage direct. Ces travaux montrent, dans une certaine mesure, l'importance de travailler avec des discrétisations propres et proposent d'utiliser des bases de fonctions B-spline, qui sont dotées de caractéristiques optimales permettant de lier les problèmes discrets aux problèmes continus, et *vice versa* [20, 165].

2.2.2.4 Bilan sur les méthodes analytiques

Les méthodes analytiques sont issues de la discrétisation du continu, on peut par ailleurs les trouver dans la littérature sous le terme *méthodes continues*. Elle ne font pas l'hypothèse d'un milieu d'acquisition discret, contrairement aux méthodes itératives. De plus, les algorithmes ne laissent que très peu de place aux apriori et aux modélisation physiques avancées (réponse impulsionnelle du capteur, atténuation). Pour ces raisons, les méthodes itératives sont de plus en plus utilisées et nous allons maintenant les présenter.

2.2.3 Reconstructions itératives

Dans les méthodes analytiques que nous venons de présenter, nous n'avions besoin de discrétiser que la transformée de Radon et l'image reconstruite, mais pas le processus de projection. En d'autres termes, nous échantillonnions des projections d'un objet f continu. Pour les méthodes itératives, où les processus de projection et de rétroprojection sont définis par des opérations matricielles, il est indispensable de modéliser f comme une fonction discrète dès le départ. C'est pourquoi nous pouvons parfois les trouver dans la littérature sous le nom de *méthodes discrètes* [15], même si ce terme peut prêter à confusion.

Ici, l'image discrète de taille $n \times n$ est assimilée au vecteur $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^{N_{\text{pix}}}$, où $N_{\text{pix}} = n^2$. On considère la matrice de projection $\mathbf{R}$, qui aux pixels de $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{N_{\text{pix}}} \end{pmatrix}$ associe les projections discrétisées $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{N_{\text{proj}}} \end{pmatrix}$ avec $N_{\text{proj}} = N_\rho N_\phi$. La matrice $\mathbf{R}$ est donc de taille $N_{\text{proj}} \times N_{\text{pix}}$ et ses éléments sont les ω calculés à la section 1.3.2.

La matrice $\mathbf{R}$ s'appelle *matrice de projection* ou plus souvent *matrice système*, elle permet de calculer la transformée de Radon discrétisée de $\boldsymbol{f}$ par :

$$\boldsymbol{p} = \mathbf{R}\boldsymbol{f}.$$

L'opérateur de rétroprojection, noté $\mathbf{R}^*$, est obtenu par la matrice adjointe de $\mathbf{R}$ — qui revient à la transposition sur une matrice réelle : $\mathbf{R}^* = \mathbf{R}^\top$. On a donc $\boldsymbol{g} = \mathbf{R}^*\boldsymbol{p}$ où $\boldsymbol{g}$ est l'image issue de la rétroprojection des projections $\boldsymbol{p}$. Pour accéder aux éléments de $\mathbf{R}$, on notera $R_{i,j}$ la valeur à la i^{e} ligne et j^{e} colonne. De même, $\mathbf{R}_{\mathbf{l}}$ désigne la matrice ligne composée de la l^{e} ligne de $\mathbf{R}$. Enfin, nous noterons $\boldsymbol{f}^{(k)}$ l'image estimée à l'itération k. Ce formalisme va nous servir pour toutes les méthodes itératives.

Le problème est donc le suivant :

$$\text{Trouver une approximation } \tilde{\boldsymbol{f}} \text{ de } \boldsymbol{f} \text{ tel que} \tilde{\boldsymbol{f}} = \arg\min_{\boldsymbol{g}} \|\mathbf{R}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{p}\|. \tag{2.36}$$

2.2.3.1 Méthodes algébriques

Les méthodes algébriques visent à résoudre le problème (2.36) de manière itérative.

Algebraic reconstruction technique (ART) L'algorithme ART a été présenté à la section 1.3.2 page 44. Cette technique permet, à chaque itération, de satisfaire l'égalité entre la mesure et le modèle de projection pour un bin de projection donné. À chaque itération k, on choisit un autre bin d'une projection, $l = \Theta(k)$.

Le choix de la fonction $\Theta : \mathbb{N} \to [1 \dots N_{\text{proj}}]$ qui associe un nouveau bin de projection à chaque itération est très important [69]. La pratique la plus simple est d'utiliser $\Theta(k) = k' + 1$ où k' est le reste de la division euclidienne de k par N_{proj} comme dans [66], mais l'algorithme converge bien plus rapidement si cette fonction tend à minimiser la corrélation entre les projections successivement utilisées [69].

Ré-exprimons l'équation (1.8) de mise à jour de l'image à l'itération k sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{f}^{(k)} = \boldsymbol{f}^{(k-1)} + \lambda^{(k)} \frac{p_l - {\mathbf{R}_\mathbf{l}}^\top \boldsymbol{f}^{(k-1)}}{\|\mathbf{R}_\mathbf{l}\|_2^2} {\mathbf{R}_\mathbf{l}}^\top. \tag{2.37}$$

Cette formule présente ART sous sa forme la plus générale, en ajoutant un paramètre de relaxation $\lambda^{(k)}$ pour chaque itération afin de contrôler la convergence.

Il est prouvé qu'en cas de données cohérentes (sans bruit) et $\lambda = 1$, ART permet de minimiser la norme ℓ_2 sur l'équation (2.36) [87].

Multiplicative algebraic reconstruction technique (M-ART) Une autre version de ART a été proposée par les mêmes pionniers de ART, appelée *Multiplicative ART* (M-ART). Cette technique est obtenue en modifiant l'étape de rétroprojection. En effet dans ART, le principe est de corriger les pixels de $\boldsymbol{f}$ en additionnant un terme correctif constitué par la différence entre le bin calculé à l'étape k et le bin mesuré. Dans M-ART, cette correction s'effectue en multipliant les pixels de $\boldsymbol{f}$ par un terme correctif correspondant au rapport entre le bin calculé à l'étape k et le bin mesuré.

Une itération corrige les pixels traversés par la ligne de projection $l = \Theta(k)$. Ainsi, chaque pixel i de $\boldsymbol{f}$ est mis à jour de la manière suivante :

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} \left(\frac{p_i}{\mathbf{R}_l \boldsymbol{f}^{(k-1)}} \right)^{\lambda^{(k)} R_{l,i}}, \tag{2.38}$$

où $\bar{f}$ est la valeur moyenne de $\boldsymbol{f}$.

En cas de données cohérentes sous-déterminées, M-ART converge vers la solution présentant le maximum d'entropie [86], c'est-à-dire qui maximise la quantité :

$$e(\boldsymbol{f}) = -\sum_{i=1}^{N_{\text{pix}}} \frac{f_i}{N_{\text{pix}} \bar{f}} \log \frac{f_i}{N_{\text{pix}} \bar{f}}. \tag{2.39}$$

En lien avec la théorie de l'information de Shannon, la solution présentant un maximum d'entropie contient le plus d'information possible, c'est-à-dire celle qui présente une distribution de ses valeurs la plus équiprobable.

Simultaneous iterative reconstruction technique (SIRT) L'algorithme ART ne prend en compte qu'un bin de projection à la fois à chaque itération et les images reconstruites ont tendance à ne pas être très homogènes. Une méthode dérivée de celle-ci, appelée *Simultaneous iterative reconstruction technique* (SIRT) [64] propose de prendre en compte à chaque itération non plus un seul bin de projection, mais tous les bins de toutes les projections traversant un même pixel, puis de rétroprojeter l'erreur moyenne.

Ainsi, à chaque itération, chaque ligne de projection est prise en compte pour corriger la valeur d'un pixel. Une itération k est terminée lorsque chacun des pixels pixel i a été mis à jour par la formule [64] :

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k-1)} + \lambda^{(k)} \frac{1}{\sum_{l=1}^{N_{\text{proj}}} R_{l,i}} \sum_{l=1}^{N_{\text{proj}}} \frac{R_{l,i} \left(p_l - \mathbf{R}_l \boldsymbol{f}^{(k)} \right)}{\sum_{j=1}^{N_{\text{pix}}} R_{l,j}}. \tag{2.40}$$

L'image reconstruite par la méthode SIRT est plus lisse que celles reconstruites par ART, mais la convergence est également plus lente du fait qu'en général aucune équation du système $\boldsymbol{p} = \mathbf{R}\boldsymbol{f}$ n'est satisfaite à chaque itération contrairement à ART.

Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) Nous avons vu que l'algorithme ART utilise un seul bin sur une projection pour corriger les pixels de l'image à chaque itération, alors que SIRT utilise l'ensemble de tous les bins de toutes les projections pour calculer une erreur moyenne avant de la rétroprojeter dans l'image. Ce moyennage de l'erreur rend l'algorithme plus robuste mais ralentit la convergence.

L'algorithme *Simultaneous algebraic reconstruction technique* (SART) [7] est un compromis entre ces deux méthodes : il reprend l'idée de moyenner l'erreur entre les bins entre chaque itération, mais cette opération est effectuée pour l'ensemble des bins d'une même projection seulement et non plus pour la totalité des projections. En d'autres termes, on pourrait dire que SIRT ne tient pas compte de l'appartenance d'un bin à une projection donnée, alors que SART prend cette information en compte.

Ainsi, une itération de SART consiste en N_ϕ sous-itérations, dans chacune desquelles N_ρ termes d'erreurs sont moyennés. Chaque pixel de l'image est mis à jour à la fin de chaque sous-itération, ce qui permet, pour la prochaine, de tenir compte de ces corrections. Enfin, nous pouvons modifier la fonction Θ utilisée dans ART pour permettre de traiter les projections dans un ordre optimal. On impose alors que $\Theta : [1 \dots N_\phi] \to [1 \dots N_\phi]$ soit une bijection pour parcourir toutes les projections. Une itération est considérée comme terminée lorsque toutes les projections ont été traitées.

$$\begin{cases} h_s = (\Theta(s) - 1) \times N_\rho \\ f_i^{(k,s)} = f_i^{(k,s-1)} + \lambda^{(k,s)} \dfrac{1}{\sum_{b=1}^{N_\rho} R_{h_s+b,i}} \displaystyle\sum_{b=1}^{N_\rho} \dfrac{R_{h_s+b,i} \left(p_{h_s+b} - \mathbf{R_{h_s+b}} \boldsymbol{f}^{(k,s-1)} \right)}{\sum_{j=1}^{N_{\text{pix}}} R_{h_s+b,j}}. \end{cases} \tag{2.41}$$

La convergence de cette méthode est prouvée [95] et les performances se révèlent généralement supérieures à ART et SIRT [7, 97].

Gradient conjugué (CG) La méthode du gradient conjugué est une méthode itérative de minimisation de fonctionnelle. Ici, la fonctionnelle que nous voulons minimiser est l'erreur aux moindres carrés, c'est-à-dire que nous cherchons la solution qui minimise la distance euclidienne entre les projections mesurées et les projections que l'on obtiendrait avec le modèle $\mathbf{R}$. Elle correspond à l'équation (2.36) pour la norme ℓ_2 que nous rappelons :

$$J(\boldsymbol{f}) = \|\boldsymbol{p} - \mathbf{R}\boldsymbol{f}\|_2^2. \tag{2.42}$$

Une condition nécessaire pour que J atteigne un minimum est que le gradient de J, noté ∇J, soit nul. En exprimant cette relation, nous obtenons les équations normales du système (2.42) :

$$\boldsymbol{f} \text{ est un minimiseur de } J \Longrightarrow \mathbf{R}^*\mathbf{R}\boldsymbol{f} = \mathbf{R}^*\boldsymbol{p}. \tag{2.43}$$

L'astuce est de considérer la forme quadratique bilinéaire symétrique définie-positive

$$\Phi(\boldsymbol{f}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{R}^*\mathbf{R}\boldsymbol{f}, \boldsymbol{f}\rangle - \langle \boldsymbol{p}, \boldsymbol{f}\rangle$$

dont la minimisation est strictement équivalente à la résolution de (2.43). L'algorithme du gradient conjugué permet de résoudre ce problème efficacement, au plus en N_{proj} itérations. Il consiste à construire une suite de directions $\boldsymbol{d}^{(k)}$ conjuguées et une suite de pas $\alpha^{(k)}$ optimaux pour mettre à jour $\boldsymbol{f}$:

$$\boldsymbol{f}^{(k+1)} = \boldsymbol{f}^{(k)} + \alpha^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k)}. \tag{2.44}$$

La suite $\boldsymbol{d}^{(k)}$ est construite comme combinaison linéaire du gradient de Φ au point $\boldsymbol{f}^{(k)} = \boldsymbol{r}^{(k)} = \mathbf{R}^*(\mathbf{R}\boldsymbol{f}^{(k)} - \boldsymbol{p})$ et de la direction précédente $\boldsymbol{d}^{(k)}$:

$$\boldsymbol{d}^{(k)} = -\boldsymbol{r}^{(k)} + \beta^{(k)}\boldsymbol{d}^{(k-1)}. \tag{2.45}$$

Pour calculer le coefficient $\beta^{(k)}$, on impose de plus que $\boldsymbol{d}^{(k)}$ soit orthogonal à $\boldsymbol{r}^{(k)}$ et conjugué à $\boldsymbol{d}^{(k-1)}$

$$\begin{cases} \left\langle \boldsymbol{d}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)} \right\rangle = 0 \\ \left\langle \boldsymbol{d}^{(k)}, \mathbf{R}^*\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k-1)} \right\rangle = 0, \end{cases}$$

ce qui donne alors :

$$\begin{cases} \alpha^{(k)} = -\dfrac{\boldsymbol{r}^{(k)\top}\boldsymbol{d}^{(k)}}{\boldsymbol{d}^{(k)\top}\mathbf{R}^*\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k)}} = -\dfrac{\boldsymbol{r}^{(k)\top}\boldsymbol{d}^{(k)}}{(\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k)})^\top(\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k)})} \\ \beta^{(k)} = \dfrac{\boldsymbol{r}^{(k)\top}\mathbf{R}^*\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k-1)}}{\boldsymbol{d}^{(k-1)\top}\mathbf{R}^*\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k-1)}} = \dfrac{(\mathbf{R}\boldsymbol{r}^{(k)})^\top(\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k-1)})}{(\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k-1)})^\top(\mathbf{R}\boldsymbol{d}^{(k-1)})}. \end{cases} \tag{2.46}$$

2.2.3.2 Méthodes statistiques

Les algorithmes itératifs proposés jusqu'ici étant des techniques de résolution de grands systèmes linéaires, ils ne *semblent* donc pas tenir compte de la nature des mesures, qui sont issues de l'observation d'un phénomène aléatoire.

Les méthodes statistiques permettent d'aborder cette notion en modélisant les données comme réalisations d'une variable aléatoire. De la même manière, chaque élément de la matrice système $R_{i,j}$ modélise ici la probabilité d'observer la valeur p_j dans le bin j sachant que le pixel i a la valeur f_i :

$$P(p_j \mid f_i) = R_{i,j}. \tag{2.47}$$

Ainsi, l'espérance des mesures est donnée $\mathbb{E} = \overline{p_j} = \mathbf{R}\overline{\boldsymbol{f}}$.

La méthode statistique pour estimer $\boldsymbol{f}$ étant donné les mesures $\boldsymbol{p}$ est le *maximum de vraisemblance*, qui tend à maximiser la quantité suivante appelée *vraisemblance* :

$$L(\overline{\boldsymbol{f}}) = P(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{f}). \tag{2.48}$$

Maximum likelihood expectation maximization (ML-EM) L'algorithme *Maximum likelihood expectation maximization* (ML-EM) a été introduit par L. A. Shepp et Y. Vardi pour la tomographie d'émission. K. Lange et R. Carson semblent ensuite avoir redécouvert cette méthode indépendamment des précédents et l'ont étendue à la tomographie de transmission [107].

En tomographie d'émission, les valeurs p_j observées sur chaque bin j, qui correspondent à un nombre de photons détectés ou *coups*, suivent une loi de Poisson d'espérance $\overline{p_j}$. Cette loi de probabilité s'écrit :

$$P(p_j = k) = \mathrm{e}^{-\overline{p_j}} \frac{\overline{p_j}^k}{k!}. \tag{2.49}$$

On peut ensuite montrer que [150] :

$$L(\overline{\boldsymbol{f}}) \geq \prod_{i=1}^{N_{\text{proj}}} \mathrm{e}^{-\overline{p_i}} \, \overline{p_i}^{p_i}. \tag{2.50}$$

Maximiser cette quantité est strictement équivalent à maximiser son logarithme $l(\overline{\boldsymbol{f}}) = \log(L\overline{\boldsymbol{f}})$, la fonction logarithme étant un morphisme croissant concave de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ dans $(\mathbb{R}, +)$. En admettant que $l(\overline{\boldsymbol{f}})$ est encore concave, son maximum est atteint pour l'unique $\overline{\boldsymbol{f}}$ qui annule sa dérivée.

L'algorithme ML-EM est un algorithme itératif, qui corrige à la k^{e} itération chaque pixel i par la formule :

$$f_i^{(k)} = f_i^{(k)} \frac{1}{\sum_{l=0}^{N_{\text{proj}}} R_{l,i}} \sum_{l=0}^{N_{\text{proj}}} \left[R_{l,i} \frac{p_l}{\mathbf{R_l} \boldsymbol{f}^{(k)}} \right]. \tag{2.51}$$

Ordered subsets expectation maximization (OS-EM) La convergence de l'algorithme ML-EM est généralement lente. Pour répondre à ce problème, H. M. Hudson et R. S. Larkin ont mis en place la technique *Ordered subsets expectation maximization* (OS-EM). La technique utilisée est semblable à celle que nous avions décrite pour passer de SIRT à SART. Les projections sont regroupées dans des sous-ensembles (*subsets*) disjoints, formés de manière à minimiser la corrélation entre les projections d'un même sous-ensemble, à la manière des méthodes algébriques.

Ainsi, l'image est mise à jour lorsque seulement un sous-ensemble de projections a été traité. Chaque sous-itération est donc plus rapide qu'une itération de ML-EM, et la prochaine sous-itération bénéficie déjà des mises à jour effectuées à la sous-itération précédente. La convergence est donc grandement accélérée [94].

$$f_i^{(k,s)} = f_i^{(k,s-1)} \frac{1}{\sum_{l \in \mathcal{S}_s} R_{l,i}} \sum_{l \in \mathcal{S}_s} \left[R_{l,i} \frac{p_l}{\mathbf{R_l} \boldsymbol{f}^{(k)}} \right]. \tag{2.52}$$

Nous pouvons noter que pour préserver la statistique de Poisson, la somme des bins doit être la même pour tous les sous-ensembles. C'est pour cette raison qu'en pratique, il faut choisir un compromis entre vitesse (grand nombre de sous-ensemble) et précision (sous-ensembles contenant beaucoup de projections).

Cet algorithme est parmi les plus couramment utilisés en pratique pour la tomographie à émission de positons.

2.2.3.3 Régularisation

Les algorithmes que nous avons décrits, et en particulier les méthodes statistiques, présentent des faiblesses lorsque les données mesurées sont fortement bruitées. En effet, le bruit sur les projections rend le système d'équation incohérent, certaines égalités étant contradictoires. L'algorithme de reconstruction fait alors face aux incohérences des données et peut alors diverger.

La manière la plus simple de corriger ce problème est d'arrêter l'algorithme après un nombre maximum d'itérations, ce qui est recommandé en routine clinique de médecine nucléaire [21, 90].

Une autre manière de contrôler cette divergence est d'imposer une condition de régularité sur la solution. Ainsi, le problème de minimisation (2.36) devient :

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \arg\min_{\boldsymbol{g}} \|\mathbf{R}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{p}\| + \lambda\phi(\boldsymbol{b}). \tag{2.53}$$

Dans cette équation, $\|\mathbf{R}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{p}\|$ est appelé *terme d'attache aux données* car elle s'assure que la solution reste proche des mesures effectuées. Le terme $\phi(\boldsymbol{b})$ est appelé *terme de régularisation* et λ est un paramètre permettant d'ajuster l'importance de la régularisation vis-à-vis de l'attache aux données. Cette forme générale de problème d'optimisation régularisé est appelé *régularisation de* Tikhonov.

Cette condition de régularité constitue une information *a priori*. Nous pouvons la voir de manière équivalente dans un cadre statistique grâce à la loi de BAYES :

$$P(\boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{p}) = P(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{f})\frac{P(\boldsymbol{f})}{P(\boldsymbol{p})}, \tag{2.54}$$

où $P(\boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{p})$ est *probabilité a posteriori* de $\boldsymbol{f}$ sachant $\boldsymbol{p}$, c'est cette quantité que nous souhaitons maximiser. $P(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{f})$ est la vraisemblance de $\boldsymbol{f}$, $P(\boldsymbol{p})$ est la *probabilité a priori* de $\boldsymbol{p}$ et $P(\boldsymbol{f})$ la *probabilité a priori* de $\boldsymbol{f}$.

La probabilité *a priori* des projections $\boldsymbol{p}$ est toujours égale à 1. Par contre, en émettant des hypothèses sur la forme de la solution, nous formulons une loi de probabilité *a priori* de $\boldsymbol{f}$.

Dans le cas de ML-EM ou OS-EM, aucune hypothèse n'est émise sur la solution et donc $P(\boldsymbol{f}) = 1$. On a alors $P(\boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{p}) = P(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{f})$, d'où le nom de la méthode [15, 27]. De la même façon, l'algorithme SIRT peut être exprimé dans ce formalisme, en faisant l'hypothèse que les bins mesurés sur les projections sont des réalisations d'une variable aléatoire suivant une loi normale [15].

Il existe une équivalence entre la régularisation de TIKHONOV exprimée ci-dessus et l'expression d'une loi de probabilité *a priori* pour l'image reconstruite. En effet, en exprimant une loi de probabilité *a priori*, le terme à maximiser n'est plus la vraisemblance $P(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{f})$ mais sa version régularisée $P(\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{f})P(\boldsymbol{f})$, qui est égale à la probabilité *a posteriori* d'après la loi de BAYES. C'est pourquoi les méthodes régularisées sont souvent appelée MAP pour *Maximum a posteriori* (*e.g.,* MAP-GC, MAP-OS-EM) [15, 40].

2.2.4 Conclusion

Nous avons présenté quelques méthodes de reconstruction classiques de la littérature. Ces algorithmes sont issus de la discrétisation spatiale naïve de l'opérateur de RADON. Les méthodes directes, que ce soit l'inversion directe dans l'espace de FOURIER ou la FBP, sont basées sur l'échantillonnage de l'espace de FOURIER de cet opérateur. Elles nécessitent donc un échantillonnage suffisamment dense, c'est-à-dire un grand nombre de projections — généralement de l'ordre de la taille de l'image — et réparties sur tout le demi-cercle $[0, 180°[$ pour couvrir l'ensemble de l'espace fréquentiel.

Les algorithmes itératifs quant à eux sont issus pour la plupart de l'analyse numérique, et sont appliqués au problème de tomographie en l'exprimant sous forme matricielle, donc discrète. De plus, leur généricité permet d'incorporer de l'information *a priori* pour guider la reconstruction [127]. Avec la montée en puissance des microprocesseurs, ces techniques sont de plus en plus utilisées.

Nous allons à présent voir comment se comportent ses méthodes si les conditions idéales d'acquisition ne sont plus respectées.

2.3 Projections acquises sur un secteur angulaire restreint

Nous avons supposé jusqu'à présent que l'échantillonnage angulaire était complet, c'est-à-dire que l'on disposait de projections dont les directions couvrent, plus ou moins uniformément, le demi-cercle $[0, 180°[$. Relaxons à présent cette hypothèse.

2.3.1 Cas d'applications

Le chapitre 1 présente plusieurs cas d'acquisitions sur un secteur angulaire restreint.

Si l'on reprend l'exemple de l'imagerie stellaire (section 1.1.2), chaque observation est très coûteuse en temps et, à cause des mouvements des astres, il est impossible en pratique d'obtenir un échantillonnage angulaire complet. C'est pourquoi la couverture fréquentielle, que nous savons désormais liée à la couverture angulaire des projections par le théorème de la tranche centrale, est très éparse et limitée angulairement dans la figure 1.8.

En tomographie médicale, l'acquisition peut être gênée par les organes environnants. En effet, surtout en scintigraphie, on tend à approcher au maximum le détecteur du patient pour obtenir une meilleure résolution et une meilleure sensibilité. La morphologie du patient interdit alors certaines orbites circulaires. Dans le cas de la tomosynthèse, la plage angulaire est définie par la taille du dispositif qui ne tourne pas, et est donc limitée *de facto*. De plus, que ce soit en médecine nucléaire ou en radiologie, le temps d'acquisition est un facteur primordial pour le confort du patient mais également pour sa radioprotection. Acquérir moins de vues est alors un moyen de réduire proportionnellement le temps de l'examen.

Pour résumer, le secteur angulaire d'acquisition peut être limité que ce soit par la géométrie même du dispositif d'acquisition (tomosynthèse, microscopie électronique,scintigraphie), par le fonctionnement des capteurs (tomographie stellaire) ou par l'objet observé (observation brève d'un objet mobile, changeant).

2.3.2 Effet de l'angle manquant

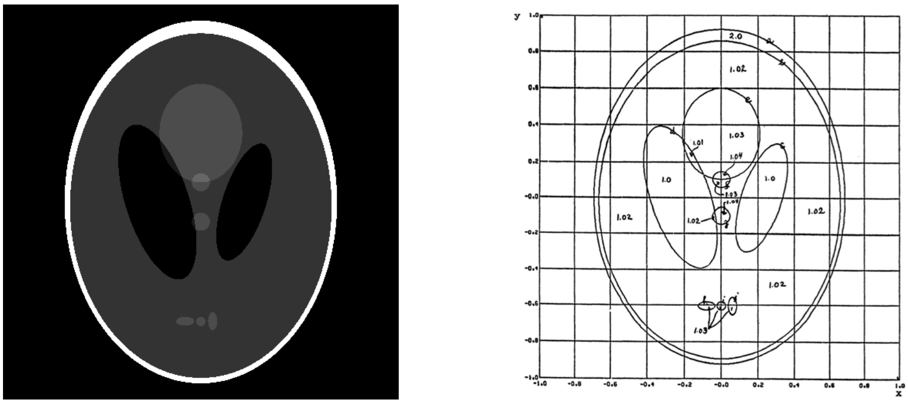
En tomographie, on parle de l'*effet de l'angle manquant* lorsque les données sont mesurées sur un secteur angulaire restreint. Les données sont alors insuffisantes pour déterminer précisément la forme des objets. En effet, selon le théorème 2.3, une infinité de projections couvrant l'ensemble des directions spatiales $[0, 180°[$ est nécessaire pour inverser la transformée de Radon.

Examinons de plus près un exemple en utilisant le célèbre *fantôme de L. A.* Shepp *et B. F.* Logan, qui constitue un objet test répandu dans le domaine de la tomographie pour comparer les algorithmes de reconstruction [149]. Cet objet, présenté à la figure 2.12, a l'avantage d'être décrit par des ellipses, c'est donc un objet analytique que l'on peut échantillonner à la résolution souhaitée. Il est de plus possible de calculer exactement la transformée de Radon de ces ellipses et de comparer les valeurs théoriques aux mesures effectuées. Le terme *fantôme* est la dénomination en imagerie d'un objet-test, qui peut être un objet physique ou un objet numérique [3].

La figure 2.13 présente les sinogrammes acquis (par transformée de Radon discrétisée) sur $[0, 180°[$ et $[0, 120°[$.

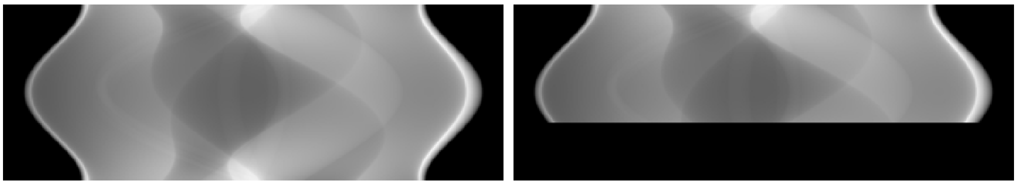
Le résultat de la reconstruction du sinogramme tronqué par la méthode de la rétroprojection filtré est donné dans la figure 2.14a. Nous pouvons voir les déformations de l'objet initial à cause de l'incomplétude des données. La figure 2.14b

3. Dans la suite, un *fantôme* désignera également en tomographie discrète un élément de l'espace nul. Le sens sera alors à déterminer en fonction du contexte.



(a) (b)

FIGURE 2.12 – Fantôme de L. A. SHEPP et B. F. LOGAN : (a) Image numérique du fantôme (b) Définition analytique [149]



(a) (b)

FIGURE 2.13 – Sinogrammes du fantôme de L. A. SHEPP et B. F. LOGAN (a) Sur $[0, 180°[$ (b) Sur $[0, 120°[$.

(a) (b) (c)

FIGURE 2.14 – Reconstruction à partir du sinogramme incomplet de la figure 2.13b avec (a) Méthode analytique FBP (b) Méthode itérative SART. (c) Espace de FOURIER correspondant à l'image reconstruite par rétroprojection filtrée. Images issues de [135]

correspond à la reconstruction du même sinogramme à l'aide de l'algorithme itératif SART. Si la reconstruction est tout de même de piètre qualité, cette dernière retranscrit mieux les contrastes de l'image initiale et produit moins d'artefacts sur les bords [6].

Il existe de nombreuses stratégies pour atténuer cet effet de l'angle manquant, nous allons en évoquer trois. Tout d'abord, on peut remarquer que les déformations géométriques de l'image reconstruite semblent être en grande partie caractérisées par le secteur angulaire manquant. On pourrait alors corriger ces déformations *a posteriori* en appliquant sur l'image une déformation inverse à celle due aux directions des projections manquantes. Cette méthode porte le nom de *squashing* [136].

Une seconde stratégie consiste à appliquer des méthodes multi-échelles, en reconstruisant d'abord une image à une résolution grossière, puis en utilisant cette dernière pour estimer les projections à une résolution plus fine, et ainsi de suite jusqu'à obtenir l'image à l'échelle souhaitée [134].

Enfin, des techniques de restauration d'images peuvent être appliquées pour recouvrer les projections manquantes dans le sinogramme avant de reconstruire l'image avec des méthodes classiques. Une étude comparative de cette deuxième classe d'algorithme est présentée dans [80].

Ces méthodes permettent de corriger l'effet de l'angle manquant, mais celui-ci reste toujours présent. En revanche, il existe d'autres approches de la tomographie — différentes en termes de discrétisation — pour lesquelles l'acquisition de données dans un secteur angulaire limité ne pose pas de problème particulier. En ce sens, nous allons maintenant présenter dans un cadre plus large la tomographie discrète, puis plus particulièrement la transformée Mojette. Dans ces deux cas, la discrétisation particulière sur chaque projection en fonction de sa direction permet de s'affranchir du problème de l'angle manquant.

2.4 Tomographie discrète

Le problème d'angle limité exposé dans la section précédente, ou plus généralement de l'insuffisance du nombre de projections, est difficile à surpasser car il remet en cause les fondements de la théorie de J. Radon. Cependant, le fait même de faire l'hypothèse du caractère discret de l'objet que l'on souhaite reconstruire — et dont on connaît les projections sur des points discrets — est en soi une information *a priori* de grande importance. C'est le cadre d'étude de la *tomographie discrète*.

Dans cette section, nous allons d'abord présenter ces fondements puis montrer l'évolution vers la reconstruction d'ensembles finis comme défini par L. Shepp. Nous introduirons ensuite une seconde définition de la tomographie discrète, qui se veut une extension de la tomographie binaire, proposée par G. T. Herman et A. Kuba.

2.4.1 Tomographie binaire

La première mention au terme *tomographie discrète* est due à L. Shepp en 1994. Celui-ci définit la tomographie discrète comme la reconstruction d'ensemble finis dans l'espace discret à partir d'un faible nombre de projections discrètes. Cette vision de la tomographie est binaire, un point appartient à l'ensemble ou n'y appartient pas. On appellera alors cette discipline la *tomographie binaire*. Bien qu'elle ne soit reconnue comme discipline en tant que telle que dans les années 90, les fondements de la tomographie binaire remontent à la seconde moitié du XX^e^ siècle, avec les travaux fondateurs de H. J. Ryser sur les aspects combinatoires des matrices binaires.

Dans cette section, nous allons d'abord présenter ces fondements puis montrer l'évolution vers la reconstruction d'ensembles finis comme défini par L. Shepp.

2.4.1.1 Deux projections orthogonales

La tomographie binaire est traitée à ses débuts comme un problème combinatoire. L'objet à reconstruire est une matrice binaire de taille $m \times n$, dont on connaît la somme des lignes et la somme des colonnes. Ces deux sommes peuvent immédiatement être interprétées comme des projections discrètes d'un objet discret, correspondant à la matrice binaire, dans les directions 0 et 90°.

Étant donné de deux vecteurs de taille respective m et n, trois problèmes fondamentaux sont à la base de la tomographie binaire à deux projections orthogonales :

Cohérence ou existence Existe-t-il une matrice dont les projections horizontale et verticale correspondent aux deux vecteurs de projection donnés ?

Unicité Existe-t-il au plus une solution ?

Reconstruction Si une solution existe, comment la déterminer ?

Existence En 1957, H. J. RYSER donne une condition nécessaire et suffisante pour que deux vecteurs $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^m$ et $\boldsymbol{c} \in \mathbb{N}^n$ représentent respectivement la somme de chaque ligne et la somme de chaque colonne d'une matrice binaire $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$. Sans se douter des retombées, H. J. RYSER établit ici un des premiers résultats en tomographie discrète. Une fois n'est pas coutume en science, il s'avère que D. GALE a découvert ce résultat la même année en s'intéressant à un problème de graphes [58]. De manière arbitraire, nous conserverons le formalisme matriciel utilisé par H. J. RYSER.

Intéressons nous de plus près à ce résultat. Un pré-requis pour l'existence de $\mathbf{A}$ est la *compatibilité* de $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{c}$, autrement dit :

— $\forall i \in [1 \dots m]\,,\ r_i \leq n\,;$

— $\forall j \in [1 \dots n]\,,\ c_i \leq m\,;$

— $r_1 + \dots + r_m = c_1 + \dots + c_n.$

Le théorème de H. J. RYSER peut alors s'énoncer ainsi [141, 154] [4].

Théorème 2.15 (Existence d'une solution binaire [141])**.** Soit $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^m$ et $\boldsymbol{c} \in \mathbb{N}^n$ deux vecteurs non-décroissants d'entiers compatibles, c'est-à-dire $r_1 \geq \cdots \geq r_m$ et $c_1 \geq \cdots \geq c_m$. Alors il existe une matrice binaire A de taille $m \times n$ telle que la somme de ses lignes forme $\boldsymbol{r}$ et la somme de ses colonnes forme $\boldsymbol{c}$ si et seulement si

$$\forall j_0 \in [1 \dots n]\,,\ \sum_{j=j_0}^{n} c_j \geq \sum_{j=j_0}^{n} r_j^*,$$

où $r_j^* = \mathrm{Card}\,\{\, i \in [1 \dots m] \mid r_i \geq j \,\}$.

L'hypothèse de non-décroissance ne restreint pas la généralité car les données peuvent très bien être permutées et remises dans l'ordre initial par la suite. Ce

4. La formulation du théorème a été légèrement modifiée par rapport à l'originale par souci de clarté en se basant sur la formulation de A. P. STOLK [154].

théorème permet donc d'établir la première question d'existence de solution de la tomographie binaire.

Unicité de la solution Les deux autres problèmes d'unicité et de reconstruction sont également traités par H. J. RYSER. Ainsi, ce dernier définit deux matrices, appelées *bascules*[5] :

$$\mathbf{A_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.55}$$

Il est clair que $\mathbf{A_1}$ et $\mathbf{A_2}$ ont les mêmes projections horizontales et verticales. Ainsi pour une matrice $\mathbf{A}$, s'il existe des indices i_1, i_2, j_1 et j_2 tels que

$$\begin{pmatrix} A_{i_1,j_1} & A_{i_1,j_2} \\ A_{i_2,j_1} & A_{i_2,j_2} \end{pmatrix} = \mathbf{A_1}.$$

L'opération consistant à transformer le terme de gauche en $\mathbf{A_2}$ ne change pas la somme des lignes et des colonnes. Par conséquent, deux matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ obtenues en transformant les bascules $\mathbf{A_1}$ de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A_2}$ sont dites *tomographiquement équivalentes*, puisqu'elles peuvent toutes deux êtres solution du même problème de tomographie binaire.

L'unicité est un corollaire immédiat de ce résultat [154].

Théorème 2.16 (Unicité du problème de tomographie binaire à deux projections)**.** Soit $\mathbf{A}$ une matrice binaire. Le problème de reconstruction en tomographie binaire d'une matrice à partir de la somme des lignes et des colonnes de $\mathbf{A}$ admet une solution unique si et seulement si $\mathbf{A}$ ne contient pas de bascule.

Reconstruction Avec la démonstration du théorème d'existence, H. J. RYSER donne également un algorithme de reconstruction. Le principe de cet algorithme est de partir d'une matrice binaire particulière et d'effectuer des permutations sur les lignes jusqu'à résoudre le problème de reconstruction tomographique. L'arrêt de

5. On peut trouver d'autres noms dans la littérature.

cet algorithme est établi, on peut alors énoncer un théorème de reconstruction [141, 154].

Théorème 2.17 (Reconstruction)**.** Soit deux vecteurs d'entiers $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^m$ et $\boldsymbol{c} \in \mathbb{N}^m$ tels que le problème de reconstruction tomographique à partir de ces deux vecteurs ait une solution. Soit

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1^* \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_m^* \end{pmatrix},$$

où $r_i^* = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ où les r_i premières valeurs sont à 1 et les $(n - r_i)$ dernières valeurs sont nulles.

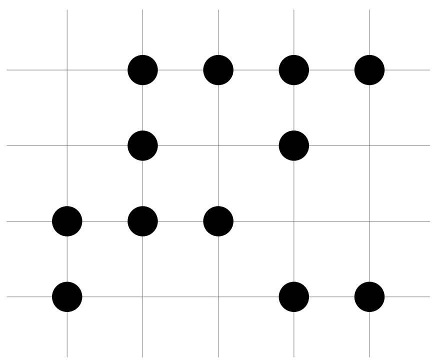
Alors, on peut transformer $\overline{\mathbf{A}}$, avec un nombre fini de permutations sur ses lignes, en une matrice A solution du problème tomographique. De plus, il existe un algorithme permettant d'effectuer cette transformation en temps polynomial.

2.4.1.2 Généralisation à la détermination d'ensembles finis de l'espace discret

L'approche combinatoire que nous venons de voir est directement transposable à la reconstruction d'ensemble finis de l'espace discret, en associant à chaque ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$ sa fonction caractéristique, qui peut alors être mise sous la forme d'une matrice binaire, comme nous pouvons le voir dans la figure 2.18.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a)



(b)

FIGURE 2.18 – Matrice binaire (a) et ensemble fini du plan discret correspondant (b)

Cependant, la détermination d'un ensemble fini par l'algorithme de H. J. Ryser n'est pas unique. Il y a alors plusieurs moyens de réduire l'ensemble des solutions possibles :

- l'ajout d'information *a priori* ;
- l'ajout de données, c'est-à-dire de projections discrètes.

Ajout d'information *a priori* En tomographie binaire, le nombre de points à reconstruire est fixé par la somme d'une projection, et les valeurs à reconstruire sont soit zéro soit un. Le seul type d'information *a priori* que l'on puisse ajouter est donc une information sur la distribution spatiale des points à reconstruire. C'est donc une information géométrique.

Les conditions géométriques sur la solution du problèmes sont alors souvent liées à la connexité, en imposant par exemple que chaque point de l'ensemble soit connecté aux autres. Cette notion va être formellement explicitée au chapitre suivant (cf. section 3.2.2 page 112). En attendant, nous pouvons visualiser intuitivement cette notion à partir de la matrice binaire. Cette matrice est dite 4-*connexe* si on peut passer d'une case noire à une autre, verticalement et horizontalement, en ne passant que par des cases noires. Elle est dite 8-*connexe* en autorisant en plus les directions diagonales. Par exemple, la matrice de la figure 2.18a est 8-connexe mais pas 4-connexe.

Donnons maintenant un exemple, issu de [85]. Soit $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{N}^n$ les projections d'une matrice carrée binaire de taille $n \times n$. Sans apriori de connexité, il existe $n!$ solutions distinctes à ce problème. En imposant la 8-connexité de la solution, il ne reste plus que deux solutions possibles : la matrice identité et la matrice antidiagonale $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ & \iddots & & \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. Remarquons également qu'il n'existe pas dans ce cas de solution 4-connexe.

Plus de deux projections Une autre solution pour contraindre l'ensemble des solutions en tomographie binaire est d'augmenter le nombre de projections de départ. Il est ainsi aisé d'imaginer deux autres projections à partir des matrices binaires, en sommant les termes sur les diagonales. Mais en considérant le problème du point de vue d'un ensemble fini de points dans un espace discret, il est également possible de définir une kyrielle d'autres directions de projection, appelées *projections discrètes*, que nous expliciterons plus tard (définition 2.19 page 89). Le problème du *bon* choix d'un ensemble des directions discrètes en fonction de l'objet à reconstruire reste encore une question ouverte [13].

Si le problème de tomographie binaire à deux projections est décidable en temps polynomial, l'utilisation de trois ou plus projections rend le problème NP-difficile [60]. Pour éviter cette explosion combinatoire, et en cas de sous- ou sur-détermination des données, il est possible d'utiliser des méthodes issues de la tomographie continue. Ainsi, G. T. Herman a proposé l'algorithme *Binary-ART* (B-ART) en se basant sur ART et en ajoutant une étape de seuillage après chaque mise à jour itérative de l'image résultat [83].

Comme précédemment, il est également possible d'ajouter des aprioris géométriques. C'est le cadre de la *tomographie géométrique*. Dans ce cas, l'on s'intéresse uniquement à reconstruire la forme ou l'enveloppe de l'objet, qui est généralement un polytope convexe. L'opérateur de projection ne correspond généralement plus à une somme d'entiers, mais à un « ou » logique et les projections sont donc elles-mêmes binaires.

2.4.2 Tomographie discrète à plusieurs matériaux

Nous avons vu que la tomographie binaire du départ, à deux projections orthogonales, a évolué et a été généralisée à plus de deux projections pas forcément orthogonales. À la fin des années 1990 et dans les années 2000, la tomographie discrète franchi un pas de plus dans la généralisation, en s'intéressant non plus à des objets binaires, mais à des objets pouvant prendre un nombre fini de valeurs. Aussi, G. T. Herman et A. Kuba définissent la tomographie discrète comme la reconstruction d'une fonction discrète ayant peu de valeurs différentes — donc discrète spatialement et en quantification — à partir de peu de projections.

Des algorithmes de reconstruction spécifiques à ce problème voient le jour, comme *Discrete algebraic reconstruction technique* (DART) [14] et sa récente version plus robuste au bruit de mesure *Soft DART* [18]. Ainsi, DART est un algorithme itératif hybride de tomographie discrète, qualifié d'heuristique. En prenant en entrée les projections discrètes et un faible (généralement de deux à cinq) nombre de valeurs que peut prendre la solution, une itération de DART consiste à reconstruire l'image résultat à l'aide d'un algorithme itératif classique, puis à appliquer une segmentation ou classification sur l'image en cours de reconstruction. Nous pouvons donc également la voir comme une régularisation par la quantification d'un algorithme de reconstruction itératif classique tel que nous l'avons vu à la section 2.2.3.

Notons que l'étape de segmentation de DART agit surtout sur les contours des objets présents dans l'image. C'est pourquoi cet algorithme est adapté à la reconstruction d'objets uniformes, avec des contours certes francs mais en petite quantité par rapport aux régions uniformes. Cette condition est très proche de celle utilisée dans le cadre de l'échantillonnage parcimonieux pour la méthode de minimisation de la variation totale [14, 28].

Les applications de la tomographie discrète à peu de matériaux sont nombreuses, car d'une part elle permet de reconstruire des images avec peu de projections et dans un champ de vue limité, et d'autre part les images produites sont déjà segmentées. Ainsi dans le domaine médical, la tomographie discrète peut par exemple être utilisée pour l'imagerie de l'os en micro-tomodensitométrie, où les trois matériaux sont généralement l'os, l'air et les vaisseaux sanguins [14, 110]. En microscopie électronique, la tomographie discrète permet de résoudre le problème de l'angle manquant [4, 12, 169].

2.4.3 Bilan

La tomographie discrète se présente comme un domaine particulier de la tomographie traitant des problèmes épars, très éloignés des hypothèses fondamentales de la théorie de Radon. Basée sur des paradigmes nouveaux, elle tire parti de caractère discret des objets sur lesquels elle agit. Elle garde tout de même un lien avec la tomographie continue que nous avons présentée au début de ce chapitre, que ce soit dans sa version binaire ou dans sa version étendue à quelques matériaux différents. Nous avons vu qu'elle permet, dans des cas d'application concrètes comme en microscopie électronique, de dépasser les problèmes d'insuffisance des données (peu de projections ou projections réparties dans un secteur angulaire limité).

En s'appuyant sur ces bases, nous allons à présent introduire la transformée Mojette, que nous verrons comme un outil de tomographie discrète en levant la restriction sur la quantification de la fonction discrète à reconstruire.

2.5 Transformée Mojette et FRT

Depuis le début de ce chapitre, nous avons vu la théorie de la tomographie dans le domaine continu par la transformée de RADON, puis ses discrétisations et les problèmes que celles-ci peuvent engendrer. Les problèmes d'échantillonnage pour la transformée de RADON se révèlent nombreux, et un échantillonnage efficace de celle-ci en supposant un milieu d'acquisition de projections continu se traduit souvent par la reproduction la plus fidèle possible des conditions idéales. Lorsque ces conditions ne sont pas réalisables, le plus souvent à cause des modalités physiques d'acquisition, des artefacts et distorsions apparaissent dans les objets reconstruits, comme nous avons pu le constater pour le problème de l'angle manquant.

Puis, dans la section précédente, nous avons montré que la tomographie se développe sur un autre volet en parallèle de la théorie continue, sous le nom de *tomographie discrète*. La tomographie discrète, développée et portée par les scientifiques ayant participé à l'avènement de la tomographie médicale, est régie par un tout autre paradigme. Le principe est d'étudier la tomographie comme un opérateur discret, agissant sur des données discrètes et résultant des données discrètes. Ainsi, le caractère *mal posé* de la tomographie continue disparaît, en remplaçant l'infinité de projections et d'échantillons requis pour réaliser la reconstruction exacte par un nombre fini, permettant de restaurer exactement l'objet discret original.

Construite d'après ces principes fondamentaux de la tomographie discrète, nous allons à présent introduire la transformée Mojette, créée dans notre laboratoire en

1995 par J. GUÉDON, D. BARBA *et al.* [72, 73].

2.5.1 La transformée Mojette

La transformée Mojette est une version discrète et exacte de la transformée de RADON. Sa principale différence avec les formes de transformées de RADON rencontrées jusqu'ici réside dans la discrétisation *a priori* de l'espace de reconstruction et d'acquisition. De plus, nous avons vu qu'un problème majeur de l'échantillonnage de la transformée de RADON était dû au remplissage polaire de la transformée de FOURIER. La transformée Mojette s'affranchit de ce problème en adaptant l'échantillonnage sur les projections à la direction de projection.

2.5.1.1 Définition

Afin de garantir un échantillonnage optimal et les identités arithmétiques, nous définissons une direction de projection pour la transformée Mojette non plus par un angle en radians, mais par un couple d'entiers $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ premiers entre eux. Soit maintenant une image discrète $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ sommable, et $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tels que $\text{pgdc}(p, q) = 1$. La transformée Mojette projette l'image f dans la direction (p, q). Cette projection s'exprime par :

$$\mathcal{M}f(b, p, q) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l)\Delta\left(b + kq - lp\right) \tag{2.56}$$

où $\Delta(\cdot)$ désigne la fonction discrète de KRONECKER définie sur $\mathbb{Z}$ par

$$\Delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En général, nous considérons une image discrète de taille finie $P \times Q$, donc un support borné et compact, c'est-à-dire

$$\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2 \setminus [0 \ldots P-1] \times [0 \ldots Q-1]\,,\ f(k, l) = 0,$$

et la formule (2.56) devient alors :

$$\mathcal{M}f(b,p,q) = \sum_{k=0}^{P-1}\sum_{l=0}^{Q-1} f(k,l)\Delta\left(b+kq-lp\right). \tag{2.57}$$

2.5.1.2 De la transformée de Radon à la transformée Mojette

Soit f une image discrète de taille $P \times Q$, chaque pixel étant de taille $\sigma \times \sigma$. Classiquement en traitement du signal, cette fonction discrète est l'équivalent de la distribution continue $\tilde{f}$ définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \tilde{f}(x,y) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k,l)\delta(x-k\sigma)\delta(y-l\sigma), \tag{2.58}$$

où $\delta(\cdot)$ représente la distribution de Dirac.

En supposant qu'elle existe, l'expression de la transformée de Radon d'angle θ est, en utilisant pour mesure de direction l'angle θ entre l'axe des abscisses et la ligne intégrale, telle que $\theta = \phi - \frac{\pi}{2}$:

$$\mathcal{R}\tilde{f}(\rho,\theta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x,y)\delta(\rho + x\sin\theta - y\cos\theta)\,dx\,dy \tag{2.59}$$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k,l)\delta(x-k\sigma)\delta(y-l\sigma)\delta(\rho + x\sin\theta - y\cos\theta)dx\,dy \tag{2.60}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k,l)\iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-k\sigma)\delta(y-l\sigma)\delta(\rho + x\sin\theta - y\cos\theta)dx\,dy \tag{2.61}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k,l)\Delta(\rho + k\sigma\sin\theta - l\sigma\cos\theta). \tag{2.62}$$

D'après l'équation (2.62), $\mathcal{R}\tilde{f}(\rho,\theta)$ est nul la plupart du temps, sauf, pour une direction θ fixée, lorsque l'équation

$$\rho = -k\sigma\sin\theta + l\sigma\cos\theta \tag{2.63}$$

d'inconnues k et l possède des solutions dans $\mathbb{Z}^2$. Pour un angle θ quelconque, les valeurs de ρ telles que le couple (k,l) décrit $\mathbb{Z}^2$ sont disposés irrégulièrement sur l'axe.

Nous voulons que l'image de ρ pour $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ produise un échantillonnage régulier de l'axe de projection. Soit en termes mathématiques :

$$\exists \tau \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ \exists b_{kl} \in \mathbb{Z},\ -k\sigma \sin\theta + l\sigma\cos\theta = \rho = b_{kl}\tau. \tag{2.64}$$

Ce critère ne peut être satisfait que pour un angle θ dont la tangente est rationnelle, c'est-à-dire de la forme $\tan\theta = \frac{q}{p}$, avec $(p,q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$. Supposons en effet que l'équation (2.64) soit vérifiée quels que soient k et l. Alors on a en particulier pour $(k,l) = (0,1)$:

$$\sigma\cos\theta = b_{0,1}\tau.$$

De même pour $(k,l) = (-1,0)$:

$$\sigma\sin\theta = b_{-1,0}\tau.$$

En excluant le cas où $\theta \equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$, $b_{0,1}$ est non nul et en prenant le rapport de ces deux dernières identités, on obtient :

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{b_{-1,0}}{b_{0,1}} \in \mathbb{Q}.$$

Réciproquement, on verifie que tout angle dont la tangente est rationnelle assure un échantillonnage régulier de l'axe de projection. Plus précisément, pour $\tan\theta = \frac{q}{p}$, $\cos\theta = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}$ et $\sin\theta = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$ et l'on obtient :

$$\forall (k,l) \in \mathbb{Z}^2,\ -k\sigma\sin\theta + l\sigma\cos\theta = -k\sigma\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} + l\sigma\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} \tag{2.65}$$

$$= \underbrace{(pl - kq)}_{b_{k,l}} \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{p^2+q^2}}}_{\tau \text{ indépendant de } k \text{ et } l}. \tag{2.66}$$

Cela signifie non seulement qu'il faut que la tangente de l'angle de projection soit rationnelle, mais que tout angle pouvant s'exprimer sous la forme $\tan\theta = \frac{q}{p}$ produise un échantillonnage régulier de l'axe de projection. Pour simplifier les notations et assurer l'unicité de la description d'un tel angle, nous introduisons la définition suivante.

Définition 2.19 (Angle discret)**.** Nous appelons *angle rationnel* ou *angle discret* tout angle $\theta \in [0, 2\pi[$ tel qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs (p, q) premiers entre eux vérifiant la propriété suivante :

$$(p, q) = \|(p, q)\|_2 \cdot (\cos\theta, \sin\theta)\,.$$

Nous désignerons de manière univoque tout angle discret (p, q). Pour la transformée Mojette, nous ne nous intéressons qu'à des angles entre 0 et π radians. Sans mention explicite, les angles discrets (p, q) seront alors à prendre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$.

En évaluant $\mathcal{R}\tilde{f}$ (équation (2.62)) sur des angles discrets $\theta = (p, q)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\tilde{f}(\rho, \theta) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l)\Delta(\rho + k\sigma \sin\theta - l\sigma\cos\theta) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l)\Delta\left(\rho + k\sigma\frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}} - l\sigma\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) && (2.67) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l)\Delta\left(\rho\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sigma} + kq - lp\right). && (2.68)
\end{aligned}$$

En imposant un échantillonnage régulier de ρ à un pas $\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{p^2+q^2}}$ d'après (2.66), on obtient l'équation (2.56) de la transformée Mojette

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}\tilde{f}(\rho = b\tau, \theta = (p, q)) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l)\Delta\left(b\tau\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sigma} + kq - lp\right) \\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k, l)\Delta(b + kq - lp) && (2.69) \\
&= \mathcal{M}f(b, p, q). && (2.70)
\end{aligned}$$

Nous venons d'établir l'équivalence entre la transformée Mojette d'une fonction discrète f et d'angle (p,q) et la transformée de Radon de $\tilde{f}$ échantillonnée à un pas $\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Nous remarquons que le pas d'échantillonnage sur les projections dépend de (p,q), donc de la direction de projection. Notons que cette formulation correspond à la notion de projection discrète utilisée par M. B. Katz [98]. Cette propriété est radicalement différente des autres discrétisations que nous avons pu rencontrer en début de ce chapitre, où toutes les projections comportaient N_ρ échantillons.

L'échantillonnage sur les projections de la transformée Mojette s'adapte donc à la direction de projection afin de garantir, par construction, que chaque ligne de projection passe par le centre d'au moins un pixel de l'image. Pour une image de taille $P \times Q$, une projection Mojette d'angle (p,q) comprend #bins échantillons ou *bins*, avec :

$$\#\text{bins}(p,q) = |p|(Q-1) + q(P-1) + 1. \tag{2.71}$$

2.5.2 Finite Radon Transform (FRT)

En 1993, F. Matúš et J. Flusser publient une version discrète, exacte et périodique de la transformée de Radon qu'ils appellent *Finite Radon Transform* (FRT) [115].

2.5.2.1 Définition

La FRT transforme une fonction discrète f de support carré $p \times p$ où p est un entier naturel positif *premier*.

$$\text{FRT}\, f(t,m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1} f(k,l) \Delta\left(\langle k - ml - t\rangle_p\right) & \text{si } 0 \leq m < p \\ \sum_{k=0}^{p-1} f(k,t) & \text{si } m = p, \end{cases} \tag{2.72}$$

où $\langle n\rangle_p \equiv n \pmod p$.

Par analogie avec la transformée de Radon ou la transformée Mojette, t représente l'abscisse curviligne sur la projection et m représente la direction de projection. L'opération de modulo signifie ici que les lignes de l'image sont rendues périodiques, de période p.

2.5.2.2 Premiers liens avec la transformée Mojette

La FRT est une version périodique de la transformée Mojette. Pour s'en convaincre, il suffit de rendre périodique l'image f, qu'on notera alors f_p. Alors, chaque projection FRT d'angle m correspond à une projection Mojette de l'image f_p à l'angle discret $(m, 1)$. Cette correspondance est illustrée par la figure 2.20.

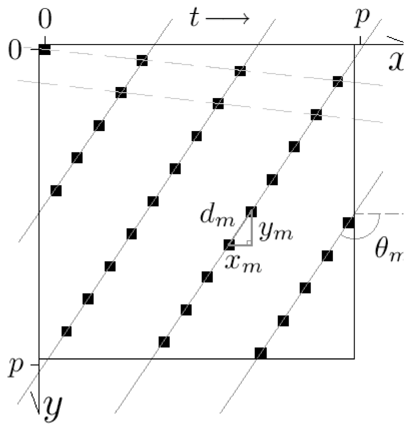


FIGURE 2.20 – Exemple de projection de direction m et l'angle discret (x_m, y_m) correspondant pour la transformée Mojette, tiré de [156]

A. KINGSTON et I. SVALBE étendent cette transformée à des images de taille $2^n \times 2^n$, puis à des images de taille $n \times n$ quelconques [101, 102]. Auparavant, ces auteurs ont également fait le lien entre les projections périodiques de type $(m, 1)$ et un angle discret (p, q) [103]. En effet, la projection périodique FRT d'angle m induit un échantillonnage des pixels régulier, qui peut correspondre à plusieurs directions discrètes, comme on peut le voir sur la figure 2.20, où la projection FRT d'angle $(m, 1)$ correspond également à un angle discret (x_m, y_m).

Parmi un ensemble d'angles discrets $\left\{(p_i, q_i)\right\}$ admissibles, il est judicieux d'opter pour l'angle qui minimise une certaine norme, généralement ℓ_2 (minimisation de d_m sur la figure 2.20), mais l'utilisation d'une autre norme est un sujet ouvert.

Ainsi la transformée FRT classique, que l'on peut noter $R(t, m)$, peut être associée à une transformée non-périodique $R(k, \theta)$, où $\tan\theta = \dfrac{y_m}{x_m}$. Ainsi, $R(k, \theta)$ est équivalente à la transformée Mojette avec un jeu d'angles discrets admissibles réduits [103].

2.5.2.3 Théorème de la tranche centrale discrète

Cette forme de transformée de RADON discrète, exacte et périodique permet d'observer un équivalent discret du théorème de la tranche centrale. Soit la fonction discrète $f\colon\ [0\ldots p-1]^2 \to \mathbb{R}$, où p est un entier premier.

La transformée de FOURIER discrète unidimensionnelle d'une projection FRT de direction $m < p$ s'écrit :

$$\mathrm{TFD_{1D}}\left(\mathrm{FRT}\, f(\cdot, m)\right)(u) = \sum_{t=0}^{p-1} \mathrm{FRT}\, f(t,m) \exp\left(-2i\pi \frac{ut}{p}\right) \tag{2.73}$$

$$= \sum_{t=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{p-1} f(k,l) \exp\left(-2i\pi \frac{ut}{p}\right) \Delta\left(\langle k - ml - t\rangle_p\right) \tag{2.74}$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{p-1} f(k,l) \exp\left(-2i\pi \frac{u\,\langle k - ml\rangle_p}{p}\right). \tag{2.75}$$

La transformée de FOURIER bidimensionnelle de l'image f s'écrit :

$$\mathrm{TFD_{2D}}\left(f\right)(u,v) = \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{l=0}^{p-1} f(k,l) \exp\left(-2i\pi \frac{uk + vl}{p}\right).$$

En exploitant la périodicité de la transformée de FOURIER discrète et en identifiant les termes dans l'exponentielle, on obtient pour $m < p$ une relation discrète entre les termes de la transformée de FOURIER discrète de f et de la transformée de FOURIER discrète d'une projection FRT, que F. MATÚŠ et J. FLUSSER qualifient de *théorème de la tranche centrale discrète* [115] :

$$\mathrm{TFD_{1D}}\left(\mathrm{FRT}\, f(\cdot, m)\right)(u) = \mathrm{TFD_{2D}}\left(f\right)(u, -um), \tag{2.76}$$

et pour $m = p$

$$\mathrm{TFD_{1D}}\left(\mathrm{FRT}\, f(\cdot, p)\right)(u) = \mathrm{TFD_{2D}}\left(f\right)(0, u). \tag{2.77}$$

Notons que cette relation exacte explicite le fait que la FRT avec $n+1$ projections pour une image de taille $n \times n$ est exactement inversible et couvre exactement le plan de FOURIER. Les méthodes de FOURIER sont donc parfaitement adaptées pour reconstruire une image à partir de projections FRT et ne nécessitent pas l'interpolation requise par une discrétisation différente de la transformée de RADON.

Une relation du même type existe pour la transformée Mojette, explicitée par P. VERBERT à l'aide de la transformée en z [171].

2.5.3 Reconstruction itérative locale Mojette

Nous avons décrit la transformée Mojette dès le début de cette section comme étant une transformée discrète et *exacte*. Elle remet en cause les principes mêmes de la tomographie continue décrits au début du chapitre. Clarifions dès à présent l'utilisation de ce terme. Il s'agit d'une imprécision à laquelle nous remédions ici en ajoutant deux hypothèses. D'*exact*, il faut comprendre :

1. en l'absence d'incertitude sur les mesures ;
2. sous condition de suffisance des mesures.

Sous l'hypothèse réaliste qu'une infinité de mesures est impossible à réaliser, nous allons alors montrer qu'un nombre fini de mesures (donc de projections Mojette) suffit à reconstruire une image discrète de support compact.

Théorème 2.21 (Théorème de K. T. SMITH [152])**.** Soit une fonction infiniment différentiable f et un nombre fini de directions. Alors il existe une nouvelle fonction infiniment différentiable f' avec exactement la même forme (f et f' ont le même support), exactement les mêmes projections dans ces directions, et totalement arbitraire sur n'importe quel sous-ensemble compact du support de f.

Ce théorème signifie donc qu'aucun ensemble fini de projection ne permet de reconstruire exactement f, à une *résolution infinie*. Nous allons voir qu'il est possible de dépasser ce paradigme en imposant une résolution finie, puis donner un des premiers algorithmes d'inversion exacte de la transformée Mojette.

2.5.3.1 Critère de suffisance de données

Un an après la publication de K. T. Smith, D. C. Solmon *et al.*, M. B. Katz dépasse ce théorème en ajoutant une information, qu'il appelle alors *résolution* [98]. Notons que ce terme peut toutefois être ambigu et qu'il ne porte pas la signification physique de résolution spatiale d'un système physique d'imagerie telle qu'on la connaît. Pour M. B. Katz, la résolution est simplement liée à la description discrète de f, pour une image f de taille $N \times N$, la résolution est définie par $\frac{1}{N}$.

Le critère de suffisance de données de M. B. Katz s'énonce comme suit [98].

Théorème 2.22 (Critère de Katz)**.** Soit une image discrète f de taille $P \times Q$, un ensemble de directions discrètes $\left\{(p_i, q_i)\right\}_{0 \leq i < N}$ et les projections discrètes qui y sont associées suivant le même échantillonnage que la transformée Mojette. Alors les projections reconstruisent de manière unique f si et seulement si

$$\sum_{i=0}^{N-1} |p_i| \geq P \text{ ou } \sum_{i=0}^{N-1} q_i \geq Q. \tag{2.78}$$

Ce théorème amende donc le théorème de Smith, en ajoutant la notion de résolution. Ainsi, pour une résolution (donc une taille d'image) donnée, il devient possible de reconstruire f exactement à partir d'un ensemble fini de projections Mojette vérifiant le critère de Katz.

La figure 2.23 donne une interprétation géométrique du critère de Katz de suffisance des données. La somme des vecteurs $(|p_i|, q_i)$ ne doit pas loger dans le support de l'image. Ainsi, nous pouvons voir que l'ensemble de projections de directions discrètes $\left\{(1,0),(1,1),(2,1)\right\}$ ne permet pas de reconstruire une image de taille 5×5 contrairement à l'ensemble $\left\{(1,1),(1,2),(-1,2)\right\}$ qui satisfait le critère de Katz.

2.5.3.2 Algorithme de reconstruction itérative locale Normand

Nous venons de voir un critère de reconstruction exacte d'une image à partir de projections Mojette. Dans le cas où les projections disponibles le permettent, nous allons à présent donner un algorithme qui réalise effectivement cette reconstruction.

Cet algorithme, décrit par N. NORMAND en 1997 [123], est similaire à celui que nous avons décrit au chapitre 1 pour le jeu Mojette. En effet, en déroulant cet algorithme, nous reconstruisons d'abord les pixels de bord qui se projettent directement dans un bin, ce qui révèle au fur et à mesure d'autres pixels voisins en correspondance univoque avec un bin d'une projection. C'est pourquoi nous l'appelons *reconstruction itérative locale* (RIL) NORMAND.

L'algorithme 2.24 permet de reconstruire entièrement l'image si les projections satisfont le critère de KATZ, ou seulement une certaine zone de l'image dans le cas contraire. Nous voyons que dans cet algorithme, les principales difficultés résident en deux points :

1. trouver les bins reconstructibles (ceux qui sont en correspondance univoque avec un pixel de l'image) ;
2. trouver le cas échéant le pixel (k, l) correspondant au bin b de la projection de direction (p_i, q_i).

Afin de lever ces deux difficultés, D. EGGEMAN, J. GUÉDON *et al.* ont proposé d'utiliser deux images auxiliaires de même taille que f, l'une notée f_{idx} que l'on appellera *image d'index* et une autre notée f_1, qui est la fonction caractéristique de f et dont tous les pixels sont à 1 [48]. En utilisant ces images auxiliaires et en maintenant une pile de bins reconstructibles, nous arrivons à l'algorithme 2.25 [48].

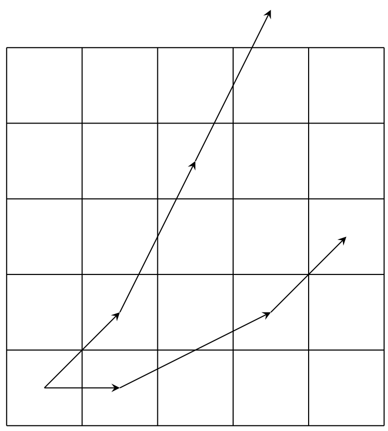


FIGURE 2.23 – Interprétation géométrique du critère de KATZ, tiré de [75]

Algorithme 2.24: Algorithme de reconstruction Mojette RIL Normand [123]

Entrée : (P, Q) : Taille de l'image à reconstruire
Entrée : I : Nombre total de projections
Entrée : $\mathcal{M}_{p_i,q_i}f$: I projections pour $i = 1, \ldots, I$
Sortie : f : fonction discrète reconstruite de taille $P \times Q$, où $N = PQ$

`/* Initialisation */`
pour chaque *pixel* (k, l) **faire**
  $f(k, l) \leftarrow 0$
fin
tant que $\exists(b, i)$ *un bin* reconstructible *sur la projection* i **faire**
  Trouver le pixel (k, l) qui se projette sur $\mathcal{M}_{p_i,q_i}f(b)$
  $f(k, l) \leftarrow \mathcal{M}_{p_i,q_i}f(b)$
  `/* Ôter la contribution du pixel` (k, l) `dans toutes les projections */`
  pour $i \leftarrow 1$ **à** I **faire**
    $b \leftarrow l \times p_i - k \times q_i$
    $\mathcal{M}_{p_i,q_i}f(b) \leftarrow \mathcal{M}_{p_i,q_i}f(b) - f(k, l)$
  fin
fin

2.5.4 Décomposition de l'espace nul de la transformée Mojette

Supposons maintenant que l'on dispose d'un ensemble de projections Mojette sur les directions discrètes $I = \left\{(p_i, q_i)\right\}_{i \in [1 \ldots N]}$. Lorsque l'ensemble I ne remplit pas le critère de Katz (théorème 2.22) pour une image de taille $P \times Q$, le problème de reconstruction est sous-déterminé. En termes d'opérateurs, cela signifie que l'opérateur transformée Mojette sur les directions I, pour une image de taille $P \times Q$, n'est pas inversible : le problème inverse possède plusieurs solutions distinctes ou n'en possède pas.

Pour étudier ce type de problème, on s'intéresse au noyau de l'opérateur, également appelé *espace nul*. C'est la méthode que nous allons appliquer ici.

Algorithme 2.25: Algorithme de reconstruction Mojette RIL Normand complet [48]

Entrée : (P, Q) : taille de l'image à reconstruire
Entrée : I : nombre de projections discrètes
Entrée : $\mathcal{M}_{p_i,q_i} f$: I projections discrètes Mojette pour $i = 1, \ldots, I$
Sortie : f : fonction discrète reconstruite de taille $P \times Q$

/* Initialisation des images auxiliaires f_{idx} et f_1 */
pour chaque *pixel* (k, l) **faire**
  $f_{\mathrm{idx}}(k, l) \leftarrow l \times P + k$
  $f_1(k, l) \leftarrow 1$
fin
/* Trouver les bins en correspondance univoque */
pour $i \leftarrow 1$ **à** N **faire**
  pour chaque b **faire**
    si $\mathcal{M}_{p_i,q_i} f_1(b) = 1$ **alors** Empiler (b, i) sur $\mathcal{S}$
  fin
fin
tant que $\mathcal{S} \neq \varnothing$ **faire**
  Dépiler (b, i) de $\mathcal{S}$
  si $\mathcal{M}_{p_i,q_i} f_1(b) = 1$ **alors**
    /* Le bin b de la projection i est reconstructible, chercher le pixel (k, l) correspondant */
    $l \leftarrow \left\lfloor \frac{\mathcal{M}_{p_i,q_i} f_{\mathrm{idx}}(b)}{P} \right\rfloor$
    $k \leftarrow l \times P - \mathcal{M}_{p_i,q_i} f_{\mathrm{idx}}(b)$
    $f(k, l) \leftarrow \mathcal{M}_{p_i,q_i} f(b)$
    /* Ôter la contribution du pixel (k, l) dans toutes les projections et mettre à jour les images auxiliaires */
    pour $j \leftarrow 1$ **à** I **faire**
      $b \leftarrow l \times p_j - k \times q_j$
      $\mathcal{M}_{p_i,q_i} f(b) \leftarrow \mathcal{M}_{p_i,q_i} f(b) - f(k, l)$
      $\mathcal{M}_{p_i,q_i} f(1) \leftarrow \mathcal{M}_{p_i,q_i} f_1(b) - 1$
      $\mathcal{M}_{p_i,q_i} f_{\mathrm{idx}}(b) \leftarrow \mathcal{M}_{p_i,q_i} f_{\mathrm{idx}}(b) - f_{\mathrm{idx}}(k, l)$
      /* Mettre à jour la pile de bins reconstructibles */
      si $\mathcal{M}_{p_i,q_i} f_1(b) = 1$ **alors** Empiler (b, j) sur $\mathcal{S}$
    fin
  fin
fin

2.5.4.1 Espace nul et fantômes

Avec les notations précédentes, l'espace nul de la transformée Mojette s'exprime par :

$$\ker(\mathcal{M}_I) = \Big\{ f\colon\ [0\dots P-1]\times[0\dots Q-1] \to \mathbb{R} \mid \\ \forall i \in [1\dots N]\,,\ \forall b\in\mathbb{Z},\ \mathcal{M}f(b,p_i,q_i) = 0 \Big\}. \quad (2.79)$$

Dans la suite du manuscrit, nous appellerons un *fantôme* tout élément de l'espace nul. M. B. KATZ a étudié ces fantômes sous forme matricielle [98].

Comme la transformée Mojette est linéaire, l'espace nul est un espace vectoriel. Il suffit donc de trouver une base de cet espace pour le décrire entièrement. Voici quelques notions sur les fantômes et leur construction.

Définition 2.26 (Fantôme minimal)**.** Un *fantôme minimal* pour un ensemble de directions discrètes $\big\{(p_i,q_i)\big\}_{i\in[1\dots N]}$ est un élément de l'espace nul de la transformée Mojette, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, ayant un support minimal au sens de l'inclusion, ainsi qu'une norme minimale sur ses valeurs. Un tel fantôme est donc minimal en terme de géométrie et de quantification.

Définition 2.27 (Fantôme minimal élémentaire)**.** Un *fantôme minimal élémentaire* pour une direction discrète (p,q) est un fantôme minimal dans cette direction.

Proposition 2.28 (Existence, unicité et construction d'un fantôme minimal élémentaire [123, 130])**.** Soit une direction discrète (p,q). Alors il existe un fantôme minimal élémentaire, de support de taille $(p+1)\times(q+1)$, unique à une multiplication par un scalaire près. Il est défini comme dans la figure 2.29 par :

$$F_{(p,q)}(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{si } (k,l) = (0,0) \\ -1 & \text{si } (k,l) = (p,q) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.80)$$

Proposition 2.30 (Unicité [123, 130])**.** Soit un ensemble de directions discrètes $\big\{(p_i,q_i)\big\}_{i\in[1\dots N]}$. Alors il existe un fantôme minimal unique à un scalaire près, donné par la convolution des fantômes minimaux élémentaires pour toutes les directions.

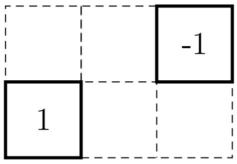


FIGURE 2.29 – Fantôme minimal élémentaire pour la direction $(p, q) = (2, 1)$

2.5.4.2 Décomposition de l'espace de reconstruction

Dans sa thèse, O. PHILIPPÉ a déterminé une décomposition de l'espace de reconstruction en somme directe avec l'espace nul.

Théorème 2.31 (Décomposition de l'espace de reconstruction [130])**.** Soit une image discrète f et un ensemble de projection $S = \{(p_i, q_i)\}_{i \in [1 \dots M]}$ de M projections discrètes. Alors il existe une unique décomposition de f telle que

$$f = f_{\mathrm{Sc}} + \sum_{i=1}^{r} \lambda_i F_{S_i}, \tag{2.81}$$

où F_{S_i} sont les translatés du fantôme minimal élémentaire partout sur tous les pixels, du moment qu'ils peuvent tenir dans le support de l'image.

Ce théorème, que nous ne démontrerons pas ici, stipule que l'on peut décomposer l'image à reconstruire par une image f_{Sc} déterminable de manière unique à partir des projections disponibles, et une image qui est dans l'espace nul de l'opérateur Mojette. En particulier, les fantômes minimaux pour l'ensemble de projections S forment une base de cet espace nul. D'après le théorème du rang, on a donc, avec les notations du théorème 2.31 :

$$\dim(\ker \mathcal{M}_S) = r. \tag{2.82}$$

Cette relation donne donc le lien avec la résolution de l'image et les projections — non seulement le nombre mais l'orientation — et complète ainsi le critère de KATZ.

Nous allons développer cette notion dans le chapitre suivant, plus particulièrement à la section 3.4.4, où nous présenterons la morphologie mathématique comme un outil efficace pour déterminer $r = \dim(\ker \mathcal{M}_S)$.

2.5.5 FRT inverse exacte

Nous nous sommes jusqu'alors préoccupés des conditions de suffisance des données pour la transformée Mojette. Pour la FRT d'une image $p \times p$, toutes les $p+1$ projections sont nécessaires pour reconstruire exactement l'image [115]. Chaque direction m en FRT étant analogue à une direction discrète $(m, 1)$ pour $m \neq p$ et à $(1, 0)$ pour $m = p$, nous retrouvons le critère de KATZ avec les $p+1$ projections nécessaires dans la direction verticale (donc des q_i).

F. MATÚŠ et J. FLUSSER donnent également un algorithme de reconstruction exact, qui tire son originalité du fait que la transformée FRT est son propre dual. En effet, une rétroprojection correspond à la projection de l'espace FRT. Soit f une image discrète de taille $p \times p$ première, et $F(t, m)$ l'espace FRT de taille $p \times (p+1)$, où chaque projection FRT de f de direction m est rangée dans la m^{e} ligne.

On a alors la formule suivante [115] :

$$\forall (k,l) \in [0 \ldots p-1]^2, \; f(k,l) = -\frac{S}{p} + \frac{1}{p}\left[F(l,p) + F(t,m)\Delta\left(\langle k - ml - t\rangle_p\right)\right]. \tag{2.83}$$

Le second terme dans l'équation (2.83) correspond à la rétroprojection des projections FRT. Cette équation correspond donc à une version discrète de la rétroprojection filtrée, et le fait que la FRT échantillonne complètement l'espace de FOURIER cartésien rend l'expression du filtre trivial.

Dans le cas où il manquerait une des $p+1$ projections, la FRT n'est plus inversible de manière exacte. Tout comme avec la transformée Mojette, l'espace nul de l'opérateur FRT n'est alors pas réduit au vecteur nul. Les éléments de cet espace nul sont encore appelés des fantômes, dont une caractérisation est donnée dans [31].

2.5.6 Structure de la matrice Mojette

Comme toute transformation linéaire, nous pouvons exprimer la transformée Mojette par une opération de projection matricielle. Soit $f : [0 \ldots n-1] \times [0 \ldots n-1] \to \mathbb{R}$ une image discrète de taille $n \times n$. En concaténant les lignes de f, nous pouvons l'exprimer sous forme vectorielle $\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f}_0 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_{N-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$, où $N = n^2$ et

$$\forall i \in [0 \ldots N-1]\,,\ \boldsymbol{f}_i = f\left(i - n\left\lfloor \frac{i}{n} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{i}{n} \right\rfloor\right) \tag{2.84}$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière.

On peut alors exprimer la transformée Mojette $\mathcal{M}f$ par le système $\mathbf{M}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{p}$, où le $\boldsymbol{p}$ vecteur de taille #bins des bins Mojette ré-arrangés en conséquence et $\mathbf{M}$ la matrice de projection de taille #bins $\times N$.

La matrice de projections $\mathbf{M}$ fait correspondre chaque pixel à un bin. Comme chaque pixel n'est sommé qu'au plus une fois dans un bin, $\mathbf{M}$ est une matrice binaire. Il est de plus possible de retrouver le critère de Katz en étudiant le rang de $\mathbf{M}$, qui doit être égal à N pour que l'image soit reconstructible. Cette expression de la transformée Mojette est très proche du paradigme de la tomographie discrète.

En 1995, J. Guédon, D. Barba *et al.* proposent une méthode de reconstruction [73] en tentant d'inverser localement la matrice $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$, où $\mathbf{M}^*$ désigne la matrice adjointe de $\mathbf{M}$ et donc la matrice de rétroprojection Mojette.

Plus tard, M. Servières, J. Idier *et al.* démontrent que la matrice $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ a une structure Toeplitz bloc Toeplitz pour des blocs de taille n [146, 147]. En effet, en exprimant $\mathbf{M}$ à l'aide des équations (2.57) et (2.84), les auteurs montrent que :

$$\begin{cases} \forall (i,j) \in [0 \ldots N-2]^2\,,\ (M^*M)_{i+1,j+1} = (M^*M)_{i,j} \\ \forall (i,j) \in [0 \ldots N-n-1]^2\,,\ (M^*M)_{i+1,j+1} = (M^*M)_{i,j} \end{cases} \tag{2.85}$$

et qu'ainsi [146]

$$
\mathbf{M}^*\mathbf{M} = \begin{array}{ccc|ccc|ccc}
\phi(0,0) & \cdots & \phi(n-1,0) & \cdots & \cdots & \cdots & \phi(0,n-1) & \cdots & \phi(n-1,n-1) \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\
\phi(-(n-1),0) & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \phi(-(n-1),n-1) & \ddots & \ddots \\
\hline
\phi(0,-1) & \cdots & \phi(n-1,-1) & \cdots & \cdots & \cdots & \phi(0,n-2) & \cdots & \phi(n-1,n-2) \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\
\phi(-(n-1),-1) & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \phi(-(n-1),n-2) & \ddots & \ddots \\
\hline
 & & & & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & & & & & & \\
\hline
\phi(0,-(n-1)) & \cdots & \phi(n-1,-(n-1)) & \cdots & \cdots & \cdots & \phi(0,0) & \cdots & \phi(n-1,0) \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots \\
\phi(-(n-1),-(n-1)) & \ddots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \phi(-(n-1),0) & \ddots & \ddots
\end{array}
\tag{2.86}
$$

où $\phi(a,b) = \sum_{(p,q)} \Delta(pb - qa)$.

Des exemples de matrices $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ sont donnés dans le tableau 3.29, page 139. Cette structure de matrice est avantageuse pour la méthode du gradient-conjugué car elle permet de réduire considérablement la complexité de l'algorithme [30, 147].

Plus tard dans le manuscrit au chapitre 6, nous allons montrer que la matrice de projection Mojette $\mathbf{M}$, ainsi que la matrice de projection FRT, s'expriment sous la forme d'une matrice de Vandermonde.

2.5.7 Bilan

Cette dernière section nous a permis de mettre en évidence l'existence d'un lien étroit entre transformée Mojette et FRT. Ces similarités sont dues au caractère fini de ces deux transformées et seront décrites plus avant dans le chapitre suivant.

Ces transformées discrètes permettent d'identifier une relation entre la résolution et le nombre de directions de projections, mais pas sur la quantification. Toutefois des tentatives existent avec la Mojette *ligne*, explorée par P. Verbert et C. Liu [110, 171] ainsi que le jeu Mojette. Nous pouvons également mentionner que la transformée Mojette ainsi que l'algorithme d'inversion Mojette Normand, en n'utilisant que des additions et des soustractions, peuvent être mis en œuvre pour des fonctions et des projections à valeurs dans des groupes cycliques. Cette propriété permet de conserver la même quantification sur les projections et dans l'image pour les usages en cryptographie et stockage distribué [99, 128].

2.6 Conclusion

La transformée de Radon est l'épicentre du large spectre de techniques de reconstruction tomographique. Celle-ci a d'abord été définie et étudiée dans le domaine continu. Ainsi, de nombreuses techniques classiques de reconstruction tomographique s'attachent à inverser cette transformée dans le domaine continu, puis à discrétiser l'algorithme. Le problème de l'inversion de la transformée de Radon souffre alors des singularités dues à l'incomplétude des données et à l'instabilité inhérente au problème.

Nous notons toutefois une évolution dans l'effort de discrétisation : les méthodes analytiques sont fondées sur une représentation continue de l'espace alors que les méthodes itératives opèrent intrinsèquement une discrétisation de l'espace de reconstruction. De plus, les méthodes itératives permettent d'introduire de l'information *a priori* et de régulariser la solution. Le problème devient ainsi plus faiblement mal posé.

La tomographie discrète quant à elle, bien qu'inspirée par le problème continu, propose un cadre radicalement différent. En effet, les aprioris sont très forts, que ce soit sur la géométrie du problème (formes convexes et grilles discrètes) ou sur la quantification. Nous avons vu en particulier qu'elle permet d'obtenir une solution exacte dans ces conditions précises. La tomographie discrète constitue donc un choix judicieux lorsque les données sont très limitées. De plus, si cette dernière était réservée au départ pour des images binaires et pour seulement deux directions de projections, le fossé entre les deux mondes tend à diminuer et les applications de la tomographie discrète sont aujourd'hui nombreuses [85].

La transformée Mojette a été présentée comme un opérateur de tomographie discrète, mais également comme une version échantillonnée de la transformée de Radon. Celle-ci tire son originalité de l'échantillonnage particulier angulairement (angles discrets) qui induit un échantillonnage optimal sur chaque projection. Ce dernier, basée sur la géométrie des pixels, est issue d'une discrétisation *a priori* de l'espace de projection et de reconstruction. Ces propriétés permettent d'établir une relation entre le nombre de pixels à reconstruire et les projections nécessaires pour les reconstruire, qui sont en nombre fini. Des résultats similaires ont été établis pour la FRT, dévoilant une ressemblance frappante entre ces deux transformées.

Deuxième partie

Géométrie et opérateurs discrets

Introduction de la deuxième partie

La tomographie discrète, contrairement à la tomographie continue « discrétisée », ne part pas d'un paradigme continu pour être échantillonné, mais utilise un paradigme discret de l'environnement spatial. Il est donc nécessaire de redéfinir les outils mathématiques utiles dans ce nouveau paradigme discret, qui est la *géométrie discrète*.

Le but de cette partie est d'explorer les relations entre la géométrie discrète et l'opérateur de transformée Mojette.

Plus précisément, nous allons nous attacher un premier chapitre d'état de l'art, à définir certaines notions essentielles de géométrie discrète (pavages et droites discrètes, transformations discrètes, morphologie mathématiques). Ces notions, qui ne sont pas sans rappeler des notions de géométrie élémentaire, ont un sens et une définition particuliers en géométrie discrète. Nous utilisons ensuite ces bases pour définir formellement et expliciter certains résultats de l'état de l'art de la transformée Mojette.

Nous continuons à étudier les liens entre géométrie discrète et transformée Mojette dans le chapitre 4 sous l'angle des transformations géométriques d'image. En particulier, nous évaluons les conséquences des transformations géométriques d'image sur les projections Mojette et nous montrons que ces transformations peuvent être effectuées de manière équivalente soit dans l'espace image, soit dans l'espace des projections Mojette.

Les chapitres 5 et 6 replacent la transformée Mojette comme opérateur de tomographie discrète.

Dans le chapitre 5, nous étudions la faisabilité de l'utilisation de la transformée Mojette pour la reconstruction d'images issues de données acquises en suivant une géométrie de tomodensitométrie à rayons parallèles.

Enfin, nous présentons dans le chapitre 6 un nouveau cadre algébrique pour décrire la transformée Mojette.

Chapitre 3

Quelques outils de Géométrie Discrète

Ce chapitre présente la géométrie discrète comme cadre théorique pour une définition exacte de la transformée Mojette. Après avoir présenté les concepts et outils de base de la géométrie discrète, nous exposons deux résultats forts de la littérature quant à l'utilisation du paradigme discret pour la tomographie ; à savoir la réduction de l'espace nul et du nombre de projections dans un compact de l'espace discret.

Sommaire

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons défini la transformée Mojette comme une version discrète de la transformée de RADON. L'objet reconstruit par la tomographie étant de nature discrète (*i.e.* une image composée de pixels), il paraît donc approprié de rester dans un cadre discret de l'acquisition à la reconstruction. La géométrie discrète permet de formaliser ce cadre discret et nous verrons dans ce chapitre qu'elle fournit les outils nécessaires à la caractérisation discrète et exacte de la tomographie Mojette.

La première partie de ce chapitre est consacrée à la mise en place de notions de géométrie discrète nécessaires pour décrire les fonctions discrètes. Nous y verrons les notions de pavages et de grilles discrètes, ainsi que de distances discrètes. Ensuite, l'introduction des séquences de FAREY-HAROS nous permettra de définir et de construire de manière formelle les directions discrètes. Enfin, nous présenterons quelques notions élémentaires de morphologie mathématique.

La seconde partie de ce chapitre vise à inscrire la transformée Mojette dans le cadre de la géométrie discrète et de la morphologie mathématique. Nous y présenterons des résultats d'unicité de la reconstruction, ainsi que la construction de fantômes minimaux grâce à la morphologie mathématique, issus de la thèse de N. NORMAND. Afin de parachever le lien entre les directions discrètes du plan et les séquences de FAREY-HAROS, nous présenterons une formule d'inversion exacte de la transformée Mojette, issue de la thèse de M. SERVIÈRES, tirant parti de l'énumération exhaustive des directions discrètes dans un compact du plan discret.

Enfin, nous présenterons une généralisation de la transformée Mojette en dimension quelconque, ainsi qu'une représentation alternative de celle-ci.

3.2 Pavages, relations de voisinage et distances discrètes

On appelle *espace discret* un pavage de l'espace continu, c'est-à-dire une partition par des éléments d'un ensemble dénombrable, appelés des *tuiles* ou des *cellules*. Un *point discret* est un point représentant ce pavage, généralement le centre de gravité de chaque tuile [32]. Inversement, chaque tuile représente généralement la *cellule de* VORONOÏ associée à un point discret, c'est-à-dire l'ensemble des points réels les plus proches de ce point discret.

Chaque pavage peut alors être décrit par ses points discrets et les arêtes ou faces que partagent deux cellules. Ainsi, chaque pavage induit une représentation duale sous forme de graphe, où chacun des sommets est un point discret de l'espace et où chacune des arêtes représente l'adjacence entre deux cellules. Cette représentation duale est appelée *maillage* ou *grille discrète* et l'on pourra choisir de représenter indifféremment l'espace discret par pavage ou par maillage. L'avantage de ces représentations est de permettre facilement l'identification de l'espace discret de dimension n à des points de $\mathbb{Z}^n$.

Les pavages peuvent se décliner de différentes sortes [1], périodiques ou apériodiques, réguliers ou non réguliers.

Nous nous intéressons ici uniquement aux pavages périodiques et réguliers du plan et de l'espace tridimensionnel. En effet, leur régularité et périodicité permettent leur utilisation pratique en géométrie discrète, notamment pour définir des distances et des relations de voisinage. Les pavages non réguliers sont quant à eux plus adaptés à l'affichage de surfaces ou variétés complexes plongées dans l'espace tridimensionnel.

3.2.1 Pavages et maillages réguliers

Définition 3.1. Un *pavage régulier* est un pavage constitué d'un seul type de polygone régulier, c'est-à-dire ayant tous ses côtés égaux.

En dimension 2, il existe exactement trois pavages réguliers du plan, illustrés par la figure 3.2 :

— le pavage carré ou cartésien ;

— le pavage triangulaire ;

— le pavage hexagonal.

1. Le lecteur intéressé pourra découvrir la diversité des pavages à travers l'encyclopédie en ligne des pavages à la page http://tilings.math.uni-bielefeld.de/tilings/

Nous voyons dans la figure 3.2 que le maillage dual d'un pavage cartésien est cartésien, qu'un pavage triangulaire induit un maillage dual hexagonal et *vice versa*.

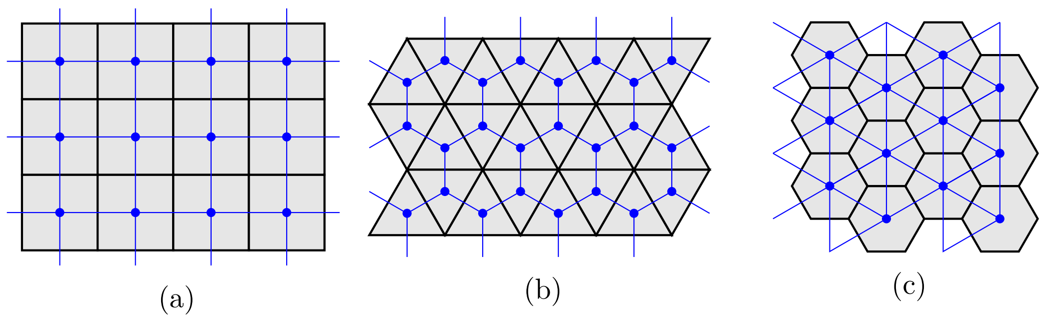


FIGURE 3.2 – Pavages (cellules grisées) et maillages (en bleu) réguliers du plan : (a) cellules carrées, (b) cellules triangulaires, (c) cellules hexagonales, reproduit depuis [32]

En informatique et en imagerie, nous appellerons ces polygones *pixels* en dimension deux et ces polyèdres *voxels* en dimension supérieure. Par abus de langage, ces mêmes termes pourront également désigner les points discrets induits par le maillage.

Le pavage cartésien est souvent utilisé de par sa simplicité de mise en œuvre et son adéquation avec les capteurs physiques et les écrans d'affichage. Ainsi dans la plus grande partie du reste du manuscrit, nous nous contenterons d'utiliser la grille carrée ou cubique, en identifiant chaque point de la grille discrète à un point de $\mathbb{Z}^2$ ou $\mathbb{Z}^3$. Cependant, les autres formes de pavages réguliers possèdent d'autres propriétés, telles que la compacité, qui peuvent se révéler intéressantes lorsqu'il s'agit d'échantillonner un signal continu [43].

En dimension supérieure, les seuls pavages réguliers sont engendrés par des hypercubes [32], par exemple le pavage cubique centré ou cubique face centrée.

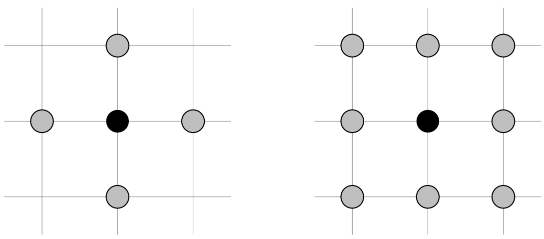
3.2.2 Relations de voisinage

Nous avons décrit la construction de maillages à partir de pavages comme la connexion par des arêtes de points discrets partageant une face. Ce critère fait apparaître la notion de *voisins* d'un point discret et de *voisinage*.

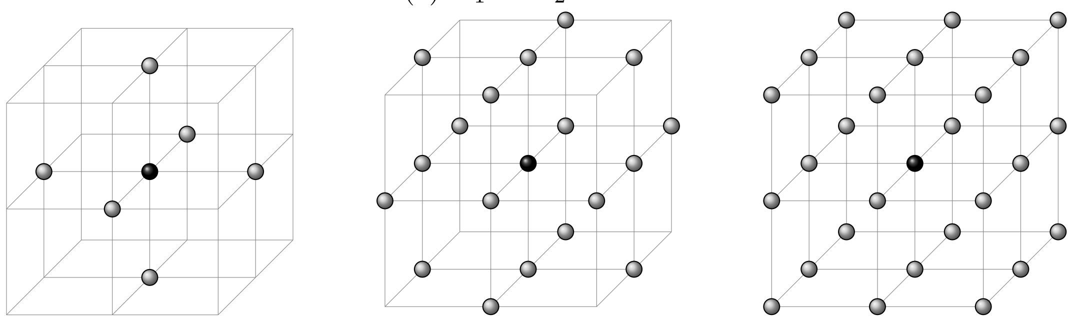
Définition 3.3 (Points k-voisins [122])**.** Dans une grille carrée, cubique ou hypercubique en dimension n, on appelle points k-voisins deux points dont les cellules partagent une face de dimension $n-k$ ou supérieure, autrement dit, s'ils n'ont pas plus de k coordonnées qui diffèrent et si celles-ci ne diffèrent pas plus d'une unité. Les points p et q sont k-voisins si et seulement si :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| \leq k \\ \forall i \in [1 \ldots n], \ \{|p_i - q_i|\} \leq 1 \end{cases}.$$

L'ensemble des k-voisins d'un point p est appelé k-voisinage et sera noté $\mathcal{N}_k(p)$ ou plus simplement $\mathcal{N}_k$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté. La figure 3.4 donne une interprétation visuelle des 1- et 2-voisinages en dimension deux, ainsi que des 1-, 2- et 3-voisinages en dimension trois. Nous remarquons qu'en 2D un 1-voisinage est composé de 4 points et un 2-voisinage comprend 8 voisins. C'est pourquoi ces voisinages sont plus communément appelés 4- et 8-voisinages, et respectivement 6-, 18- et 26-voisinages en trois dimensions.



(a) $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ dans $\mathbb{Z}^2$



(b) $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_3$ dans $\mathbb{Z}^3$

FIGURE 3.4 – k-voisinages en dimension deux (a) et trois (b)

Cette notion de voisinage permet de définir des chemins et des distances discrètes.

3.2.3 Distances discrètes

Beaucoup de notions de géométrie classique, notamment topologiques, reposent sur les notions de norme et de distance. À l'instar de la notion de voisinage, la discrétisation pose le problème de la distance entre deux points ou entre deux objets. Nous allons formaliser ici la notion de distance discrète et en présenter quelques exemples.

Définition 3.5 (Distance discrète [139])**.** Soit une fonction $d\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes : $\forall(x, y, z) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n$,

séparation $d(x, y) = 0 \iff x = y$

symétrie $d(x, y) = d(y, x)$

inégalité triangulaire $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Alors d est une *(fonction) distance discrète.*

Cette définition de distance discrète découle de la définition de distance dans des espaces vectoriels normés, bien qu'elle n'induise pas forcément une norme. Pour compléter l'analogie avec les espaces vectoriels normés, il serait d'abord nécessaire d'introduire la notion de *module*, qui est l'équivalent d'un espace vectoriel sur un anneau au lieu d'un corps, $\mathbb{Z}$ n'étant ni un corps ni un espace vectoriel. À partir de là, il est possible de définir une norme discrète comme une application g invariante par translation et homogène [162, 163].

Pour une fonction de distance d donnée, nous définissons des *boules* de centre c et de rayon r comme l'ensemble des points discrets distants d'au plus r du point c.

Définition 3.6 (Boule fermée et boule ouverte)**.** Soit $d\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}$ une fonction de distance discrète. On appelle *boule ouverte* $B_<(c, r)$ et *boule fermée* $B_\leq(c, r)$ de centre c et de rayon $r \in \mathbb{N}$ les ensembles de points discrets :

$$\begin{aligned} B_<(c, r) &= \{\, p \in \mathbb{Z}^n \mid d(c, p) < r \,\} \\ B_\leq(c, r) &= \{\, p \in \mathbb{Z}^n \mid d(c, p) \leq r \,\} \end{aligned}.$$

Les distances discrètes ont été introduites pour la première fois par A. Rosenfeld et J. L. Pfaltz en 1966 [140] puis elles ont été formalisées et approfondies par les mêmes auteurs dans un second article paru dans le tout premier numéro de *Pattern Recognition* [139]. Dans ces articles, les auteurs définissent deux distances discrètes d_1 et d_2 de la manière suivante :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2, \begin{cases} d_1(p,q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| \\ d_2(p,q) = \max\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\} \end{cases}. \tag{3.1}$$

On peut tout de suite noter que ces distances discrètes correspondent exactement aux distances ℓ_1 et ℓ_∞ des espaces vectoriels.

D'autre part, ces distances correspondent respectivement au voisinage $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$. En effet, la boule unité $B_\leq(O,1)$ est égale à $\mathcal{N}_1$ pour d_1 et à $\mathcal{N}_2$ pour d_2. Intuitivement, on peut imaginer qu'elles correspondent au nombre discret de déplacements qu'il faut effectuer pour aller « au mieux » d'un point à un autre, en n'autorisant que les directions verticales et horizontales pour d_1 [2] et en ajoutant les directions diagonales pour d_2.

Cette interprétation de la distance entre deux points p et q comme la longueur du plus court chemin reliant p et q est la façon la plus courante de définir des distances [163]. Pour cela, il nous faut définir un chemin discret et sa longueur.

3.2.4 Distances et chemins discrets

Pour définir un chemin discret, il suffit de remplacer, dans la définition d'un chemin dans un espace continu, la notion de continuité par la notion de voisinage. On obtient alors la définition suivante.

Définition 3.7 (k-chemin)**.** On appelle k-chemin de p vers q, toute séquence finie de points discrets voisins $\pi = (p = p_0, p_1, \ldots, p_N = q)$ contenant au moins un point et où $\forall i \in [1 \ldots N]$, $p_i \in \mathcal{N}_k(p_{i-1})$. On note $\mathcal{P}_k(p,q)$ l'ensemble de ces chemins.

2. C'est la raison pour laquelle on trouve parfois d_1 sous les noms de *distance de Manhattan*, *taxi-distance*, etc.

Définition 3.8 (Distance engendrée par des chemins)**.** Dans un espace discret de dimension n, soit $p \in \mathbb{Z}^n$ et $q \in \mathbb{Z}^n$ deux points discrets et $\mathcal{P}(p,q)$ l'ensemble des chemins de p vers q. La fonction $d\colon \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{N}$ est une *distance engendrée par des chemins* si :

1. $\forall (p,q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n,\ d(p,q) = \min \{ \mathcal{L}(\pi) \mid \pi \in \mathcal{P}(p,q) \}$,
2. d est une distance,

où $\mathcal{L}(\pi)$ est la *longueur* ou le *coût* du chemin π.

La construction d'une distance discrète à partir d'un chemin peut donc dépendre :

— du type de voisinage ;

— de la définition de la longueur.

Nous présentons par la suite plusieurs distances engendrées par des chemins différents.

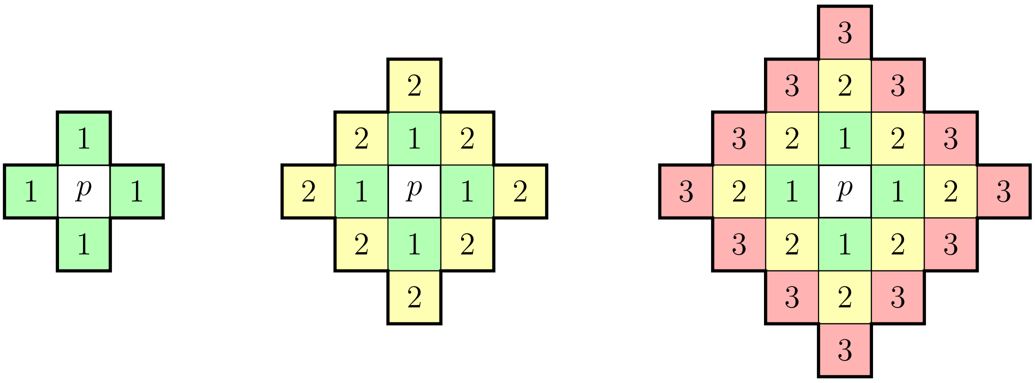
3.2.5 Distances de voisinage

À présent, nous allons voir trois types de distances particulières basées sur des chemins. Nous obtenons le premier type de distance en utilisant des k-chemins, puis nous allons modifier le type de voisinage pour obtenir un second type de distance, et enfin combiner voisinage et pondérations pour obtenir le troisième type de distances.

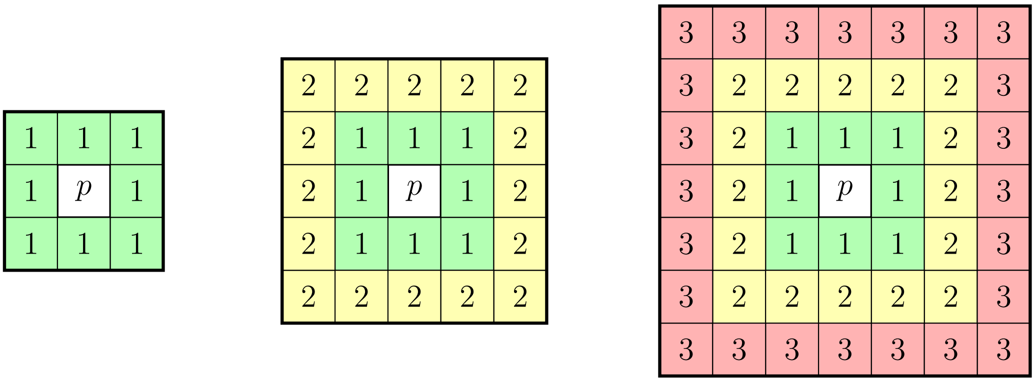
3.2.5.1 Distance engendrée par des k-chemins

Il est aisé de se rendre compte que les distances d_1 et d_2 définies précédemment sont engendrées par des 1- et 2-chemins. Les notations restent donc cohérentes.

Cependant en n'utilisant que des k-chemins, la notion de distance engendrée par des chemins reste pauvre car il n'est possible de définir qu'au plus n distances discrètes distinctes en dimension n et les boules résultantes sont très anisotropes. En effet, comme nous pouvons le voir dans la figure 3.9, les boules de d_1 et d_2 ne présentent pas d'invariance par rotation comme un disque euclidien. Bien qu'elles correspondent avec la distance euclidienne dans les directions horizontales et verticales, d_1 surestime les directions diagonales et d_2 les sous-estime.



(a) Boules de distances $B_{\leq}(p, r)$ pour d_1 avec $r \in \{1, 2, 3\}$



(b) Boules de distances $B_{\leq}(p, r)$ pour d_2 avec $r \in \{1, 2, 3\}$

FIGURE 3.9 – Boules de distances pour d_1 (a) et d_2 (b)

3.2.5.2 Distances à séquence de voisinages

Pour limiter les problèmes d'anisotropie pour les distances basées sur des k-chemins, A. ROSENFELD et J. L. PFALTZ proposent de nouvelles distances basées sur d'autres chemins utilisant plusieurs notions de voisinage. Par exemple, la distance d_{oct} est construite par alternance de la 1- et la 2-adjacence entre chaque point constituant le chemin. De manière plus générale, une distance engendrée par des chemins utilisant alternativement plusieurs voisinages est appelée une *distance à séquence de voisinages*.

Ces distances à séquence de voisinage, bien que plus proches de la distance euclidienne que les distances basées sur les k-chemins, restent encore anisotropes. Ceci provient du fait que chaque déplacement a un coût unitaire. Ceci peut se résoudre en partie en modifiant non plus le choix du voisinage mais la longueur utilisée dans la construction du chemin.

3.2.5.3 Distances de chanfrein

Dans le but de proposer une distance discrète approximant au mieux la distance euclidienne, U. Montanari propose d'utiliser le 2-voisinage mais de compenser l'anisotropie en pondérant différemment les déplacements selon les directions [118]. Ainsi, un déplacement horizontal et vertical coûte 1 mais un déplacement diagonal coûte $\sqrt{2}$, comme pour la distance euclidienne classique. On notera cette distance $d_{1,\sqrt{2}}$.

Pour aller encore plus loin, U. Montanari propose de construire des chemins composés de points discret sans relation de voisinage. La relation de voisinage est alors remplacée par un ensemble de directions de déplacement autorisées et pondérées. Nous appellerons cet ensemble de directions et de poids un *masque de chanfrein* et, sous condition de respect des conditions de la définition 3.5, la distance qui en résulte une *distance à masque de chanfrein* ou une *distance de chanfrein*.

G. Borgefors popularise les distances à masque de chanfrein (ou distances de chanfrein) en construisant des masques à valeurs entières, correspondant davantage à la définition courante des distances discrètes [23, 24]. Ainsi préconise-t-elle l'utilisation des valeurs $(3, 4)$ pour les poids de déplacement plutôt que les valeurs réelles de la distance euclidienne (cf. figures 3.10 et 3.11)

3.2.6 Bilan

Les distances discrètes sont issues des relations de voisinage dans l'espace discret. D'abord construite par propagation de k-voisinages, nous avons vu que d'autres distances ont été construites pour s'approcher au mieux de la distance euclidienne. En particulier, les distances de chanfrein permettent d'affecter des pondération à

$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$
1	0	1
$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$

(a)

4	3	4
3	0	3
4	3	4

(b)

FIGURE 3.10 – Masques de chanfrein des distances (a) $d_{1,\sqrt{2}}$ et (b) $d_{3,4}$

			3			
	$2\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	2	$1+\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	
	$1+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	
3	2	1	p	1	2	3
	$1+\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	
	$2\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}$	2	$1+\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	
			3			

(a) $B_{\leq}(p,3)$

			9			
	8	7	6	7	8	
	7	4	3	4	7	
9	6	3	p	3	6	9
	7	4	3	4	7	
	8	7	6	7	8	
			9			

(b) $B_{\leq}(p,9)$

FIGURE 3.11 – Boules de distances pour (a) $d_{1,\sqrt{2}}$ et (b) $d_{3,4}$

des déplacements dans l'espace discret pour rendre les boules de distances les plus isotropes possible. Nous avons vu dans nos exemples des masques de chanfrein à deux pondérations, mais il est possible d'augmenter encore l'invariance en rotation en augmentant la taille de ces masques, autorisant ainsi des déplacements vers des pixels qui ne seraient pas directement k-voisins. Ces directions de déplacement définies par les masques de chanfrein sont généralement choisies parmi un ensemble de directions *élémentaires* appelés des *points visibles*. Nous allons à présent définir ces notions.

3.3 Séquences de Farey-Haros et angles discrets

Une fois définies les notions de voisinage, de distance et de chemin dans l'espace discret, nous allons maintenant nous intéresser à la notion d'angle discret qui utilise le concept des points visibles de l'espace discret et les séquences de FAREY-HAROS.

3.3.1 Points visibles de l'espace discret

Imaginons une source lumineuse située à l'origine du plan ou de l'espace et que chaque point discret forme un écran opaque. Un observateur placé sur un point discret ne peut voir cette source que si aucun point opaque ne se situe entre lui et la source lumineuse. L'ensemble des positions de l'observateur depuis lesquelles celui-ci voit la source lumineuse forme l'ensemble des *points visibles* de l'espace.

Plus formellement, nous pouvons définir ces points par :

Définition 3.12 (Point visible)**.** On appelle *point visible* un point discret p tel que le segment continu $]O, p[$ soit vide dans $\mathbb{Z}^n$.

Sur une grille carrée, le nombre de points discrets sur un segment $]p, q]$ est donné par le plus grand diviseur commun des composantes du vecteur $\overrightarrow{pq}$:

$$\forall (p, q) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n,\ \#]p, q] = \mathrm{pgdc}\left(\{q_i - p_i\}_{1 \leq i \leq n}\right)$$

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point discret p soit un point visible est alors :

$$\mathrm{pgdc}(\{p_i\}_{1 \leq i \leq n}) = 1$$

avec la convention $\mathrm{pgdc}(0, m) = m$.

En dimension 2, trouver les points visibles revient à trouver les couples d'entiers relatifs premiers entre eux. En particulier, les points visibles du plan $p = (p_1, p_2)$ tels que p_2 soit positif coïncident exactement avec la définition 2.19 des angles discrets pour la transformée Mojette.

Ces couples sont donnés par les *séquences de* FAREY, que nous appellerons

FAREY-HAROS pour rétablir le préjudice historique [3].

3.3.2 Définition et construction par fraction médiane

Définition 3.13 (Séquences [4] de FAREY-HAROS)**.** La séquence de FAREY-HAROS d'ordre n, notée $\mathcal{F}_n$, est la séquence croissante des fractions irréductibles comprises entre 0 et 1 et dont le dénominateur n'excède pas n [81] :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{F}_n = \left(\frac{q_1}{p_1} = \frac{0}{1}, \frac{q_2}{p_2}, \ldots, \frac{q_m}{p_m} = \frac{1}{1}\right)$$

où, pour tout entier positif i :

— $p_i \in \mathbb{N}^*$ et $q_i \in \mathbb{N}$

— $0 \leq q_i \leq p_i \leq n$

— $\dfrac{q_i}{p_i} < \dfrac{q_{i+1}}{p_{i+1}}$

— $\mathrm{pgdc}(p_i, q_i) = 1$

Ces séquences possèdent des propriétés remarquables. La première d'entre elles est la relation entre deux fractions consécutives dans $\mathcal{F}_n$. Ainsi, deux termes consécutifs $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ vérifient la relation

$$bc - ad = 1.$$

Cette propriété entraîne, par le théorème de BÉZOUT, le fait qu'en plus d'être premier avec b (respectivement c), a (respectivement d) est premier avec c (respectivement b).

3. Curieusement, J. FAREY a publié une note sur ses observations à propos des liens entre deux fractions irréductibles consécutives de dénominateur inférieur à n à partir de tables sans en apporter de preuve. CAUCHY prouve ces résultats dans ses *Exercices de mathématiques* et attribuant la paternité à J. FAREY. Cependant, G. H. HARDY et E. M. WRIGHT observent que la paternité de ces résultats aurait dû revenir à C. HAROS [81] qui a publié en 1801 une table des fractions irréductible de dénominateur inférieur à 100 et un moyen de construction par fraction médiane [82]. HARDY se permet d'ajouter dans *A mathematician's apology* que "*Farey est passé à la postérité pour n'avoir pas su comprendre un théorème que Haros avait parfaitement prouvé quinze ans plus tôt*". Afin de conserver un semblant de neutralité dans le conflit franco-anglais, nous nous alignons sur le parti pris de l'ouvrage britannique *The Pinguin dictionary of mathematics* d'attribuer à la fois à J. FAREY et C. HAROS la paternité de ces fameuses séquences...

4. On parle aussi souvent de *suites* de FAREY-HAROS dans la littérature.

Une seconde propriété de ces séquences est la relation entre trois termes consécutifs $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{e}{f}$ d'une séquence de Farey-Haros :

$$\frac{c}{d} = \frac{a+e}{b+f}. \tag{3.2}$$

On dit alors que $\frac{c}{d}$ est la *fraction médiane* de $\frac{a}{b}$ et $\frac{e}{f}$. Cette dernière relation constitue une méthode de construction récursive de $\mathcal{F}_n$ à partir de $\mathcal{F}_{n-1}$ en insérant entre deux fractions consécutives de $\mathcal{F}_{n-1}$ leur fraction médiane si son dénominateur ne dépasse pas n. Il est facile de montrer que cette construction est licite, c'est-à-dire que :

1. La fraction médiane de deux termes consécutifs d'une séquence de Farey-Haros est toujours une fraction irréductible ;
2. Cette construction est exhaustive et donne au moins tous les termes manquants entre $\mathcal{F}_{n-1}$ et $\mathcal{F}_n$.

3.3.3 Représentation graphique

La séquence de Farey-Haros est particulièrement intéressante car elle coïncide, par définition, avec l'ensemble des points visibles contenus dans un demi-carré de $\mathbb{Z}^2$. En effet, il suffit d'assimiler chaque fraction irréductible $\frac{q}{p}$ de $\mathcal{F}_n$ au couple (p,q) pour obtenir l'ensemble des points visibles de type $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, avec $0 \leq q \leq p \leq n$.

En conservant l'isomorphisme $\frac{q}{p} \mapsto (p,q)$, $\mathcal{F}_n$ donne exactement l'ensemble des points visibles du demi-carré $\{ (x,y) \in [0 \ldots n] \times [0 \ldots n] \mid y \leq x \}$. De même, chaque point visible P peut être visualisé comme un vecteur $\overrightarrow{OP}$, et définit donc un angle discret. La figure 3.14 illustre graphiquement ce rapprochement entre séquences de Farey-Haros, points visibles et angles discrets.

En considérant la figure 3.14, il apparaît trivial d'obtenir l'ensemble des points visibles du carré $[0 \ldots n] \times [0 \ldots n]$ entier en effectuant la symétrie par rapport à la première bissectrice du plan, de direction discrète $(1,1)$. De plus, cette symétrie s'effectue simplement en inversant les rôles de p et q.

De la même manière, une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, de direction

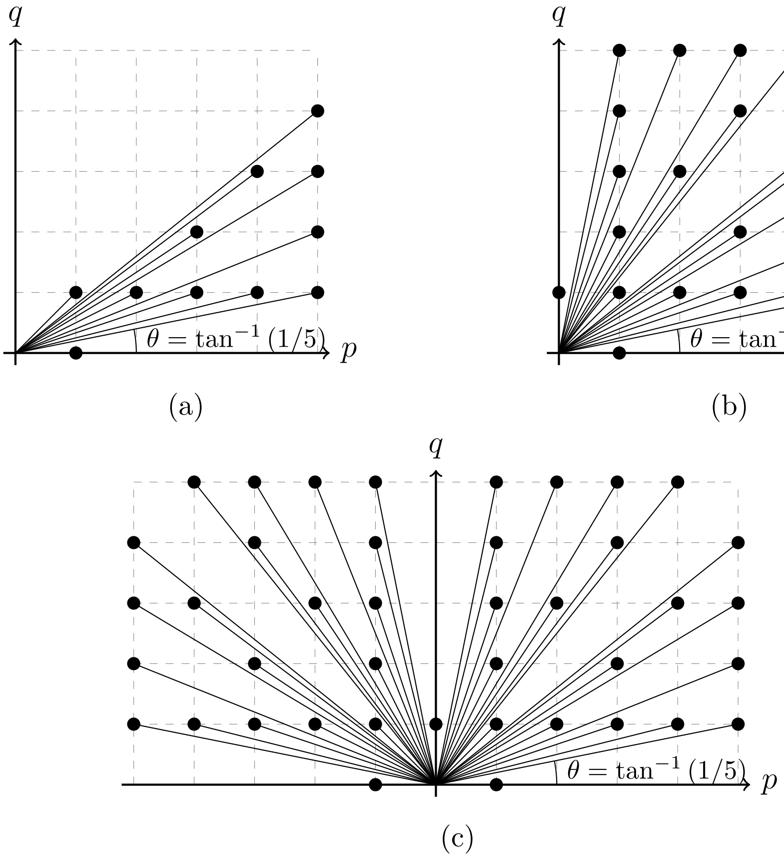


FIGURE 3.14 – (a) $\mathcal{F}_5$ et points visibles dans le demi-carré $[0\dots5]\times[0\dots5]$, $p \geq q$, (b) Points visibles dans le carré complet $[0\dots5]\times[0\dots5]$ obtenus par symétrie par rapport à la première bissectrice (direction discrète $(1,1)$) et (c) Points visibles dans $[-5\dots5]\times[0\dots5]$ obtenus par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (direction discrète $(0,1)$).

discrète $(0,1)$, permet d'obtenir tous les points visibles du demi-plan supérieur ($q \geq 0$), comme nous pouvons le voir sur la figure 3.14b.

Cette manière de construire un ensemble de directions discrètes à partir d'une séquence de FAREY-HAROS joue un rôle important en tomographie discrète et en particulier pour la transformée Mojette. D'une part, les éléments de $\mathcal{F}_n$ étant classés par ordre croissant et la fonction tangente étant également croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, l'ensemble d'angles discrets obtenu est d'ores et déjà trié angulairement. De plus, cette construction permet d'obtenir exactement toutes les directions discrètes contenues dans une image carrée de taille $n+1$. Nous montrerons à la section 3.5

l'importance de ce dernier point.

3.4 Morphologie mathématique

La morphologie mathématique est une théorie d'analyse de formes et de voisinages apparue dans les années 1960, portée par G. Matheron et J. Serra. Cette théorie, initialement développée pour la granulométrie, permet à travers des traitements non-linéaires de :

— caractériser des formes et la topologie (squelette morphologique, érodé ultime),

— d'effectuer des traitements dits « morphologiques » basés sur la forme, comme l'érosion ou la dilatation,

— d'effectuer des traitements topologiques, dont l'exemple le plus connu est sans doute la segmentation par lignes de partage des eaux.

3.4.1 Historique

Inventée en 1964 pour la granulométrie, la morphologie mathématique a très vite été étendue à des domaines plus théoriques comme l'étude des ensembles aléatoires et des treillis, ainsi que celle des fonctions non-binaires (dites non-plates) grâce à trois publications principales [114, 143, 144]. En 1979, elle donne naissance à une théorie de segmentation basée sur la topologie : les *lignes de partage des eaux* ou *watershed*. Cette théorie présente un fort lien entre topologie discrète et continue, notamment à travers la théorie de Morse discrète [138], ainsi qu'avec la théorie des graphes avec les *power watersheds* [36]. La morphologie mathématique est toujours un domaine de recherche très actif, en particulier aujourd'hui pour l'étude des hiérarchies de partitions [145, 175].

3.4.2 Quelques opérations de morphologie mathématique

La morphologie mathématique est basée sur un traitement ensembliste de l'objet d'étude à l'aide d'autres ensembles fondamentaux : les *éléments structurants*. Dans le plan discret assimilé à $\mathbb{Z}^2$, un élément structurant est un ensemble de points de ce plan. Sa forme va servir de gabarit pour les opérations morphologiques.

Dans la suite, on notera $B \subset \mathbb{Z}^2$ l'élément structurant.

3.4.2.1 Opérations ensemblistes

Les opérations de base de Morphologie Mathématique étant fondamentalement ensemblistes, définissons quelques opérations de base sur les ensembles.

Définition 3.15 (Symétrique d'un ensemble)**.** Soit E un sous-ensemble d'un espace vectoriel stable pour l'addition, X une sous-partie de E . Le *symétrique* de X, noté $\check{X}$, est l'ensemble :

$$\check{X} = \{ -x \mid x \in X \} .$$

Définition 3.16 (Translation d'ensemble)**.** Soit E un sous-ensemble d'un espace vectoriel stable pour l'addition, X une sous-partie de E et p un élément de E. La *translation* de X par p, notée $(X)_p$, est l'ensemble :

$$(X)_p = \{ x + p \mid x \in X \} .$$

Dans le plan discret, ces opérations ensemblistes coïncident avec les notions de géométrie classique.

Définition 3.17 (Somme de Minkowski)**.** Soit E un sous-ensemble d'un espace vectoriel stable pour l'addition, X et Y deux sous-parties de E. L'*addition* ou *somme de* Minkowski, notée $X \oplus Y$

$$X \oplus Y = \{ x + y \mid x \in X, y \in Y \} .$$

La somme de Minkowski peut également s'écrire de façon équivalente en utilisant l'opération de translation définie ci-dessus :

$$X \oplus Y = \bigcup_{y \in Y} (X)_y = \bigcup_{x \in X} (Y)_x .$$

Certains auteurs utilisent cette expression pour définir une opération duale (mais non réciproque) à la somme de MINKOWSKI, appelée *soustraction* de *Minkowski.*

Définition 3.18 (Soustraction de MINKOWSKI)**.** Soit E un sous-ensemble d'un espace vectoriel stable pour l'addition, X et Y deux sous-parties de E. La *soustraction de* MINKOWSKI, notée $X \ominus Y$

$$X \ominus Y = \bigcap_{y \in Y} (X)_y \,.$$

3.4.2.2 Dilatation morphologique

La dilatation morphologique est une des deux opérations de base de la Morphologie Mathématique. Elle consiste à augmenter les bords d'un objet par une forme, appelée élément structurant. Si l'élément structurant est isotrope, la dilatation morphologique aura pour effet de « gonfler » l'objet. Par contre, un élément structurant non-isotrope va privilégier certaines directions de déformation et une dilatation par élément structurant non centré sur l'origine entraînera une translation de l'objet. En principe, cette opération est donc non-linéaire.

Définition 3.19 (Dilatation morphologique)**.** La dilatation morphologique d'un objet $X \subset E$ par un élément structurant B, notée $\delta_B(X)$, est définie par :

$$\delta_B(X) = \left\{ p \in E \;\middle|\; (B)_p \cap X \neq \varnothing \right\}.$$

Plus concrètement, un point p appartient à la dilatation de X par B si et seulement si le translaté de B par p a au moins un point commun avec X. On peut de plus montrer que la dilatation correspond à l'addition de Minkowski de l'objet par le symétrique de l'élément structurant :

$$\delta_B(X) = X \oplus \check{B} = \bigcup_{b \in \check{B}} (X)_b \,. \tag{3.3}$$

3.4.2.3 Érosion morphologique

L'érosion est l'opération duale de la dilatation. Elle a pour effet d'amincir les bords des objets, encore une fois selon un élément structurant. Cette opération tend à contrer l'effet d'une dilatation, sans toutefois parvenir à inverser la dilatation dans le cas général.

Pour définir l'érosion, on remplace la relation d'intersection par une relation d'inclusion dans la définition 3.19.

Définition 3.20 (Érosion morphologique)**.** L'érosion morphologique d'un objet $X \subset E$ par un élément structurant B, notée $\epsilon_B(X)$, est définie par :

$$\epsilon_B(X) = \left\{ p \in E \;\middle|\; (B)_p \subseteq X \right\}.$$

Ainsi, un point appartient à l'érosion de X par B si et seulement si le translaté de B par p est entièrement inclus dans X. Cette relation peut également se traduire sous forme de soustraction de MINKOWSKI :

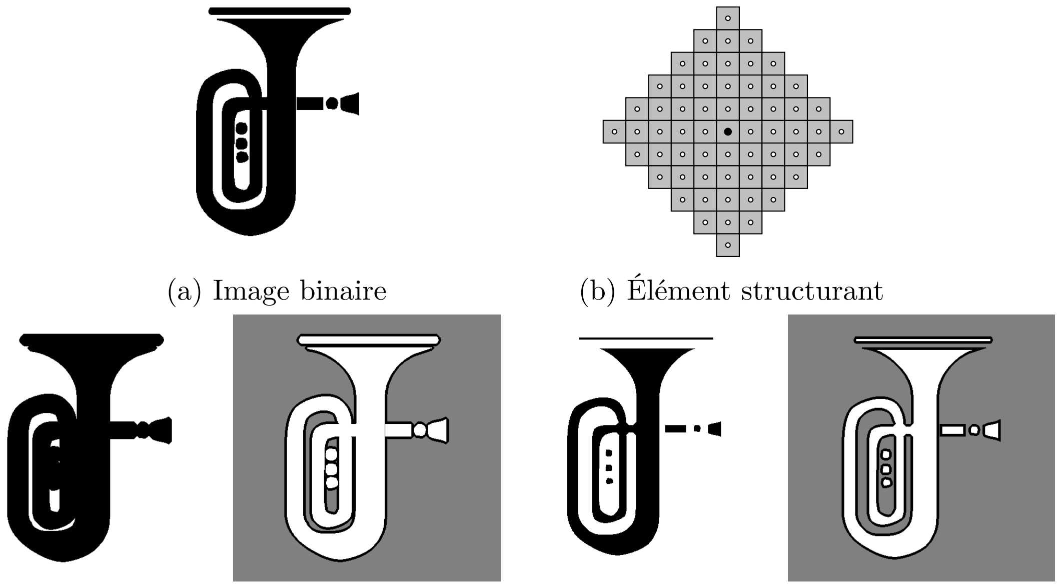
$$\epsilon_B(X) = X \ominus \check{B} = \bigcap_{b \in \check{B}} (X)_b. \tag{3.4}$$

Les opérations de dilatation et d'érosion sont illustrées à la figure 3.21. Elles permettent de définir toutes les autres opérations de morphologie mathématique en les composant dans un ordre précis.

3.4.3 ES2P et pq-connexité

Il apparaît dans la section précédente que l'élément structurant est la pièce maîtresse de toute opération morphologique. Parmi la kyrielle d'éléments structurants possibles, les éléments structurants à deux pixels jouent un rôle fondamental.

On appelle *élément structurant à deux pixels* (ES2P), toute paire de points du plan discret. Ce sont les éléments structurants les plus simples en morphologie mathématique, si l'on exclut les éléments structurants à un seul pixel qui ne modifient pas la forme des objets. À l'instar des travaux de N. NORMAND, nous définissons dans ce manuscrit les ES2P à une translation près en choisissant pour un des points de l'ES2P l'origine du plan discret [123].



(a) Image binaire

(b) Élément structurant

(c) Dilatation

(d) Différence

(e) Érosion

(f) Différence

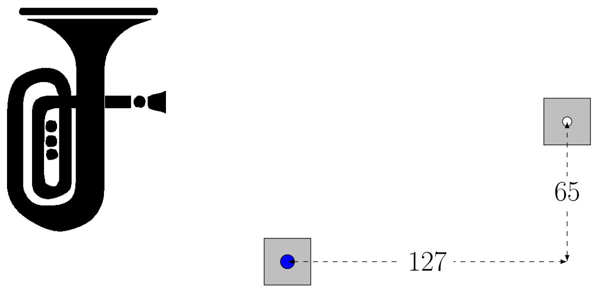
FIGURE 3.21 – Dilatation (c) et érosion (e) morphologiques de l'objet (a) à l'aide de l'élément structurant (b). Les images (d) et (f) représentent en noir les pixels ajoutés par la dilatation et les pixels supprimés par l'érosion.

3.4.3.1 Dilatation et érosion par un élément structurant à deux pixels

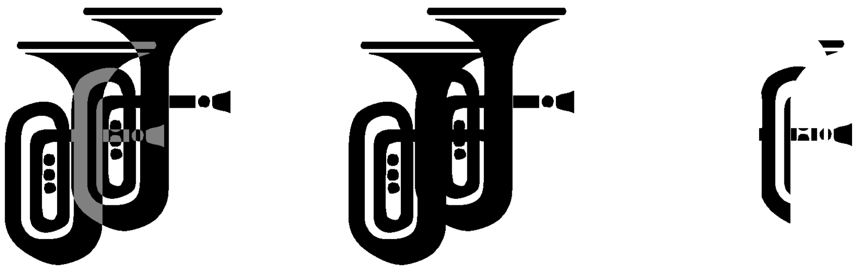
Dans le cas particulier des ES2P, la dilatation et l'érosion prennent une forme particulièrement simple. Soit X un objet du plan discret et $B = \{O, u\} = \{(0,0), (p,q)\}$ un ES2P quelconque ayant pour origine O. En partant de la caractérisation d'une dilatation de l'objet X comme l'union des translatés de X par les points de $\check{B}$; et l'érosion comme leur intersection, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \delta_B(X) &= X \cup (X)_{-u} \\ \epsilon_B(X) &= X \cap (X)_{-u} \end{aligned}.$$

Un exemple d'érosion et de dilatation par un élément structurant à deux pixels est donné à la figure 3.22.



(a) Image binaire (b) Élément structurant



(c) Translation (d) Dilatation (e) Érosion

Figure 3.22 – Dilatation (d) et érosion (e) de l'objet (a) par l'ES2P (b). La figure (c) correspond à l'objet initial et son translaté par $(-127, -65)$, les pixels gris représentant l'intersection des deux formes.

3.4.3.2 ES2P : vecteurs propres de la dilatation

Les ES2P sont les éléments structurants les plus simples à même de générer une série de points alignés sur la même droite à partir d'un point. En outre, les n dilatations d'un point par un ES2P ne sont autres que cet ES2P translaté n fois. L'opération de dilatation par un ES2P devient alors linéaire. Nous pouvons ainsi, par analogie avec la théorie spectrale en algèbre linéaire, présenter les ES2P comme les vecteurs propres de la dilatation.

La dilatation répétée d'un point discret par un ES2P de la forme $\{O, (p, q)\}$ et de son symétrique $\{O, (-p, -q)\}$ forme un ensemble de points séparés par un vecteur (p, q). Ces points partagent vraisemblablement une relation de voisinage, différente des relations de voisinage usuelles dans $\mathbb{Z}^2$, que nous appellerons *pq-connexité*.

Définition 3.23 (pq-adjacence et pq-connexité)**.** Deux points x et y du plan discret sont dits pq-adjacents s'il existe $k \in \{-1, 1\}$ tel que $x = y + k \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{N}_{p,q}(x)$ le pq-voisinage du point x.

La pq-connexité est l'extension transitive de la pq-adjacence. Ainsi, un ensemble de $n > 0$ points $\{x_1, \ldots, x_n\}$ est pq-connexe si $n = 1$ ou si $n > 2$ et :

$$\forall i \in [1 \ldots n], \exists j \in [1 \ldots n], j \neq i, \ x_j \in \mathcal{N}_{p,q}(x_i)$$

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive et constitue donc une relation d'équivalence.

Le cas particulier où p et q sont premiers entre eux est d'importance capitale. Nous dirons alors que l'ES2P est *premier*. Dans ce cas, les points générés par une infinité de dilatations d'un point x du plan discret par l'ES2P $\left\{O, (p, q)\right\}$ et $\left\{O, (-p, -q)\right\}$ correspondent exactement aux points discrets alignés avec x dans la direction (p, q). Nous appellerons cet ensemble une *pq-droite*, notée $\mathcal{D}\left(x, p, q\right)$. Dit autrement, une *pq-droite* correspond à une infinité de dilatations d'un point de l'espace discret. À titre d'exemple, la figure 3.24 représente une $(-2, 1)$-droite et une $(3, 2)$-droite.

Les ES2P premiers forment donc une classe d'équivalence par la relation de pq-connexité qui est une droite pq-connexe.

Nous allons maintenant étudier comment les outils de géométrie discrète et de morphologie mathématique, appliqués à la transformée Mojette, permettent de réduire deux problèmes infinis de la tomographie, en les plongeant dans un domaine fini.

3.4.4 Morphologie mathématique et transformée Mojette

Nous avons vu, dans la section précédente sur la morphologie mathématique, qu'il était possible de définir des droites discrètes à partir d'ES2P premiers.

En choisissant un point de l'ES2P sur l'origine du plan discret, il convient

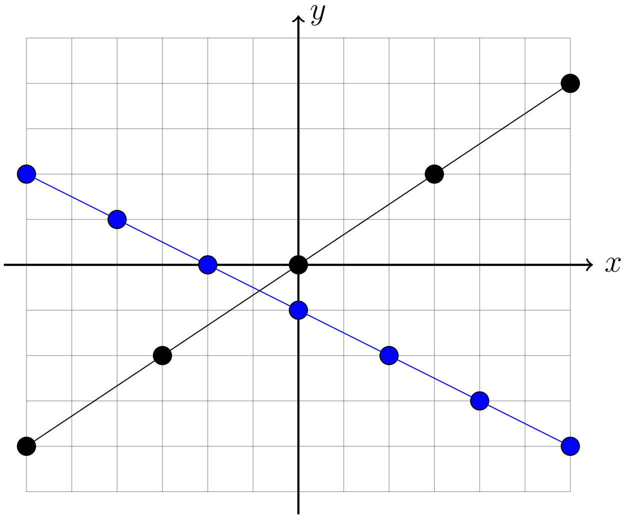


FIGURE 3.24 – Deux pq-droites : $\mathcal{D}(O, 3, 2)$ en noir et $\mathcal{D}\Big((4, -3), -2, 1\Big)$ en bleu. Les points sur ces droites sont respectivement $(3, 2)$- et $(-2, 1)$-connexes.

naturellement d'identifier un ES2P à un vecteur $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ et un ES2P premier à un angle discret (p, q). Les points échantillonnés par un bin de la projection Mojette dans la direction (p, q) sont pq-connexes et forment un pq-segment discret.

Il existe donc des relations fortes entre la transformée Mojette et la morphologie mathématique.

3.4.4.1 Unicité de la reconstruction

Dans cette section, nous présentons la généralisation du critère de suffisance de données de KATZ, défini pour des images rectangulaires, à un support convexe quelconque.

Théorème 3.25 (Support du fantôme minimal d'un ensemble de projections [123])**.** Soit $P = \{(p_i, q_i)\}_i$ un ensemble d'angles discrets. Le support d'image I_M formé par les dilatations successives d'ES2P $B_i = \{O, (p_i, q_i)\}$ est le support de la plus petite image reconstructible de façon non-unique par l'ensemble des projections Mojette de directions discrètes dans P.

Nous pouvons déduire de ce théorème que toute sous-partie de I_M est reconstructible de façon unique pour l'ensemble de projections donné. Il en résulte que si le support de l'image à reconstruire est convexe et strictement inclus dans I_M, alors cette image est reconstructible de façon unique. N. Normand montre que ce résultat peut être étendu, lorsque le support de l'image à reconstruire est convexe, au cas plus général lorsque le support de l'image n'est pas inclus dans I_M, mais lorsque leur intersection n'est pas I_M tout entier, dont voici l'énoncé.

Théorème 3.26 (Reconstructibilité de forme convexe [123]). Soit $P = \{(p_i, q_i)\}_i$ un ensemble d'angles discrets, auxquels on associe un ES2P $B_i = \{O, (p_i, q_i)\}$ et I_M leurs dilatations successives. Alors toute image convexe dont le support ne contient pas I_M est reconstructible par l'algorithme de Mojette inverse Normand (cf. algorithme 2.25 page 97). Autrement dit, toute image convexe est reconstructible de façon unique si et seulement si l'érodé de son support par I_M est vide.

3.4.4.2 ESP2 et non-unicité

Le théorème 3.25 est à interpréter au sens des fantômes. En effet, on parle de l'image I_M formée par la dilatation successive des ES2P correspondant aux directions discrètes. Le fait que I_M soit reconstructible de façon non-unique signifie qu'elle appartient à l'espace nul de la transformée Mojette. Le fait qu'elle soit de plus minimale en terme de support signifie que I_M est un fantôme élémentaire pour l'ensemble de projections. Le théorème 3.25 fournit donc une méthode de construction du support d'un fantôme minimal pour un ensemble de projections donné, à partir de la dilatation des ES2P correspondant aux vecteurs de projections, comme nous pouvons le voir sur la figure 3.27. Cette méthode est à rapprocher de la méthode de construction de fantômes par convolution (cf. section 2.5.4.1 page 98).

Toujours du point de vue des fantômes, nous pouvons interpréter intuitivement le théorème 3.26 comme le fait qu'une forme convexe est reconstructible si et seulement si on ne peut y loger aucun fantôme. De manière équivalente nous avons vu que l'érodé de la forme par le fantôme doit être vide. Lorsqu'une forme convexe n'est pas reconstructible de façon unique, son érodé par le fantôme minimal donne un ensemble de pixels qu'il faudrait ôter de la forme pour la rendre reconstructible de façon unique.

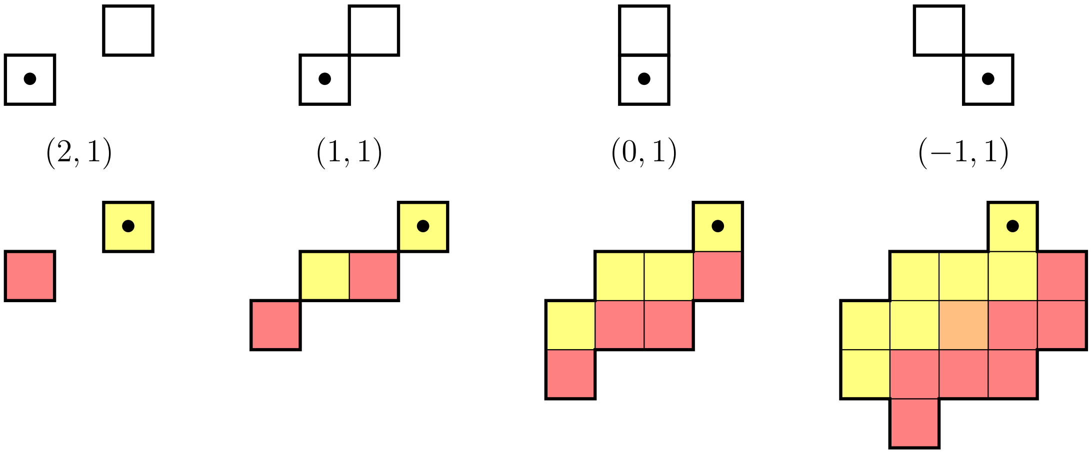


FIGURE 3.27 – Dilatations successives d'un pixel central par les éléments structurants à deux pixels correspondant aux vecteurs $(2, 1)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$ et $(-1, 1)$. L'origine du plan discret est représentée par le symbole $\bullet$. Pour chaque étape, les pixels jaunes correspondent aux pixels pré-existants et les pixels rouges sont créés par la dilatation des pixels jaunes. Les pixels appartenant à la fois à ces deux catégories sont colorés en orange.

Or, fixer la valeur d'un de ces pixels à 0 équivaut à ôter ce pixel de la forme à reconstruire. Ainsi, il est possible de décomposer une forme convexe en une partie non-reconstructible de façon unique — à laquelle on assigne une valeur arbitraire — et en une partie qui devient alors reconstructible de façon unique. De plus avec cette construction, les pixels non-reconstructibles de façon unique sont ceux sur lesquels on peut translater le fantôme minimal de l'image.

L'érosion d'une forme convexe par les ES2P correspondant à la forme du fantôme minimal fournit donc à la fois la dimension et une base particulière de l'espace nul de la transformée Mojette pour un ensemble de directions discrètes données. Cette base correspond au fantôme minimal pour l'ensemble de directions discrètes, translaté sur chacun des points de l'érodé.

3.4.5 Généralisation en dimension n

La transformée Mojette a initialement été créée en deux dimensions. Cependant, tout comme la transformée de RADON et la transformée en rayons X, nous pouvons étendre sa définition en dimension trois ou plus généralement en dimension n.

P. Verbert et N. Normand définissent la transformée Mojette en dimension n en remplaçant un angle discret (p, q) par un n-uplet $(v_1, \ldots, v_n)$ d'entiers relatifs premiers entre eux dont au moins un des termes est non-nul. L'indice de bin b est remplacé par un vecteur de dimension $n-1$. Ainsi, l'image en dimension n est projetée sur un hyperplan de dimension $n-1$. La transformée Mojette en dimension n correspond donc à une version discrète de la transformée en rayons X. Pour une image discrète $f\colon [0 \ldots N_1 - 1] \times \cdots \times [0 \ldots N_n - 1] \to \mathbb{R}$, la transformée Mojette en dimension n s'énonce [172] :

$$\mathcal{M}_{(v_1,\ldots,v_n)} f(\boldsymbol{b}) = \sum_{i_1=0}^{N_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{N_n-1} f(i_1, \ldots, i_n)\, \Delta_n \left(\boldsymbol{b} + \mathbf{P}_{n \to n-1} \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{pmatrix} \right) \tag{3.5}$$

où :

— $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \cdots b_{n-1} \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{Z}^{n-1}$ est l'indice des bins sur l'hyperplan de projection ;

— $\Delta_n(\cdot)$ est l'extension en dimension n de la fonction Δ discrète de Kronecker

$$\forall \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \cdots u_n \end{pmatrix}^\top \in \mathbb{Z}^n,\ \Delta_n(\boldsymbol{u}) = \Delta(u_1) \times \Delta(u_2) \times \cdots \times \Delta(u_n);$$

— $\mathbf{P}_{n \to n-1}$ est une matrice de taille $n-1 \times n$ de projection sur l'hyperplan. On peut supposer à une permutation près que $v_n \neq 0$, on a alors :

$$\mathbf{P}_{n \to n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{-v_1}{v_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{-v_2}{v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{-v_{n-1}}{v_n} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

Cette description ne permet malheureusement pas d'avoir des bins $\boldsymbol{b}$ à coordonnées entières. Ainsi en dimension deux, la matrice $\mathbf{P}_{2 \to 1}$ ainsi construite revient à l'équation $\frac{b}{q} + kq - lp = 0$. Cela vient du fait que la matrice $P_{n \to n-1}$ ne décrit pas les vecteurs de base de la maille projetée. Il faudrait en dimension deux prendre la matrice $\mathbf{P}'_{2 \to 1} = \begin{pmatrix} q \\ -p \end{pmatrix}$ car le pixel de coordonnées $(1, 0)$ se projette sur le bin q.

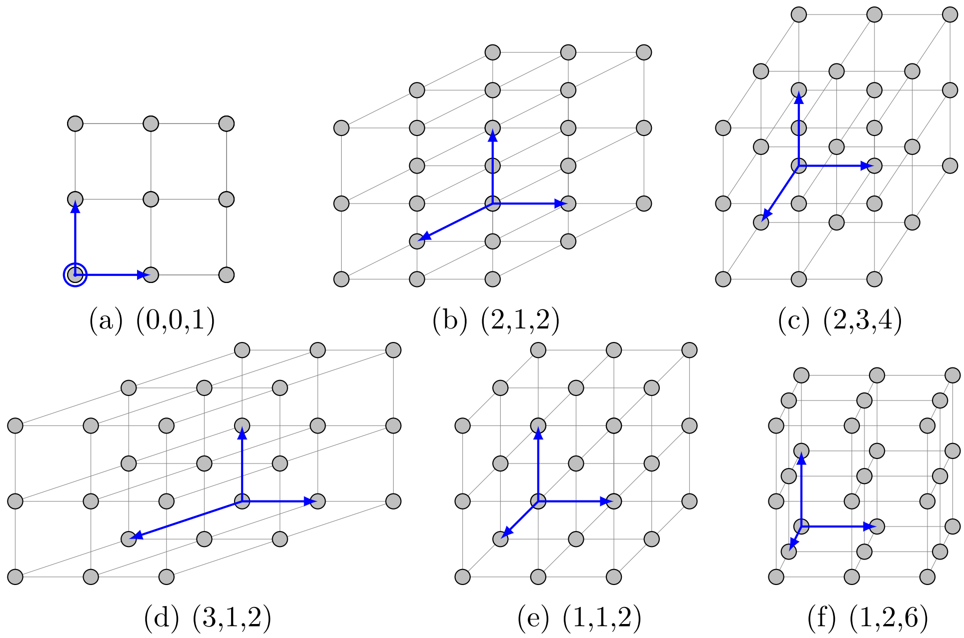


FIGURE 3.28 – Exemples de projections discrètes Mojette d'une grille cubique 1-connexe pour des images de taille $3 \times 3 \times 3$. Les vecteurs en bleu représentent la projection des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{Z}^3$.

En dimension n, ce problème devient beaucoup plus complexe. Nous pouvons le voir dans la figure 3.28c où pour la direction (2,3,4), la projection des vecteurs de base ne donne pas une base de la grille projetée. N. NORMAND, M. SERVIÈRES *et al.* ont résolu ce problème en construisant itérativement les vecteurs de base de la maille projetée [124]. D'autres exemples de ces mailles sont donnés dans la figure 3.28.

3.5 Séquences de Farey-Haros et transformée Mojette

La reconstruction d'image à partir de la transformée Mojette est un problème de tomographie discrète. Le seul algorithme que nous avons vu pour l'instant était local. Nous allons voir à présent un algorithme de reconstruction global.

Les méthodes globales, qu'elles reposent sur des méthodes d'inversion matricielles ou des formules analytiques, ont souvent pour cible l'analyse du couple dual (et adjoint) projection/rétroprojection. En effet, la correction des projections par un filtre dérivateur en FBP peut également être vu en discret comme la correction dans l'espace de Fourier de la sur-représentation de certaines fréquences (due à la densité de l'échantillonnage polaire). De même, les méthodes itératives comme le gradient conjugué sont basées sur l'optimisation de la matrice $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$, dont les propriétés ont été étudiées par M. SERVIÈRES [146] et que nous avons rappelées au chapitre 2.

3.5.1 Méthode de rétroprojection complète exacte

Dans cette section, nous considérons une image carrée f de taille $N \times N$. On note $\tilde{f}_{p,q}$ l'image obtenue par la rétroprojection de la projection Mojette de f dans la direction (p, q) :

$$\tilde{f}_{p,q} = \mathcal{M}^* \left[\mathcal{M}_{p,q} f\right].$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned}
\forall (k,l),\ \tilde{f}_{p,q}(k,l) &= \left[\mathcal{M}_{p,q} f\right](lp - kq) && (3.7)\\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i,j)\Delta(lp - kq + iq - jp) && (3.8)\\
&= \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f(i,j)\Delta(p(l-j) - q(k-i)) && (3.9)\\
&= f(k,l) + \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq l} f(i,j)\Delta(p(l-j) - q(k-i)). && (3.10)
\end{aligned}$$

Pour un ensemble de M projections $\{(p_m, q_m)\}_{m \in [1 \ldots M]}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\forall (k,l)\ \tilde{f}_M(k,l) &= \sum_{m=1}^{M} f(k,l) + \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq l} f(i,j)\Delta(p_m(l-j) - q_m(k-i)) && (3.11)\\
&= M f(k,l) + \sum_{i \neq k} \sum_{j \neq l} f(i,j)\Delta(p_m(l-j) - q_m(k-i)). && (3.12)
\end{aligned}$$

Ainsi, chaque pixel (k, l) de $\tilde{f}_M$ est la somme de M fois $f(k, l)$ et la somme de chaque autre pixel aligné avec (k,l) dans les directions (p_m,q_m). Tous les pixels intervenant dans cette deuxième somme sont distincts deux à deux car chaque direction discrète (p_i,q_i) est différente.

On suppose désormais que nous possédons toutes les directions possibles (p,q) nécessaires pour joindre chaque couple de points de l'image, nous obtenons :

$$\forall(k,l),\ \tilde{f}_M(k,l) = Mf(k,l) + \sum_{i\neq k}\sum_{j\neq l} f(i,j) \tag{3.13}$$

$$\tilde{f}_M(k,l) = (M-1)f(k,l)\sum_{m=1}^{M} f(k,l) + \underbrace{\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} f(i,j)}_{S} \tag{3.14}$$

S représente la somme de tous les pixels de l'image. Cette somme est facile à déterminer car la somme des bins de n'importe quelle projection est égale à la somme des pixels de l'image. Cette propriété est l'équivalent discret de la propriété de conservation de l'aire de la transformée de Radon.

Nous avons donc, pour chaque pixel de l'image :

$$f(k,l) = \frac{1}{M-1}\left(\tilde{f}_M(k,l) - S\right). \tag{3.15}$$

L'équation (3.15), obtenue par M. Servières dans sa thèse, montre qu'il est possible d'inverser exactement et très facilement la transformée Mojette lorsque l'on dispose de toutes les directions discrètes contenues dans le pavé $[-(N-1)\dots(N-1)]\times[0\dots(N-1)]$. Or, nous avons vu à la section 3.3.3 et plus particulièrement sur la figure 3.14 qu'un tel ensemble est donné par la séquence de Farey-Haros d'ordre $N-1$ et ses symétriques.

Ce résultat est très intéressant. En effet, le fait de pouvoir inverser la transformée Mojette à condition de disposer de toutes les directions discrètes contenues dans l'image de taille finie apparaît comme l'équivalent discret de la condition nécessaire de disposer d'une infinité de projections pour l'inversion de la transformée Radon (cf. chapitre 2). Ici, l'infinité du domaine continu est remplacée par une quantité finie, mais complète, grâce à l'utilisation de la géométrie discrète et aux propriétés des séquences de Farey-Haros. De plus, cette méthode utilisant pour chaque pixel la totalité de l'information disponible est très robuste au bruit.

Ce résultat a été découvert indépendamment par M. Servières pour la transformée Mojette et par F. Matúš et J. Flusser pour la FRT [115]. Plus tard, A. Kingston et I. Svalbe étendent cette identité à la FRT généralisée, pour des images de taille $N \times N$ avec N quelconque. En utilisant un ensemble d'angles complet, la FRT généralisée est inversible selon une formule très similaire à l'équation (3.15), en corrigeant certains pixels du sur-échantillonnage produit par des tailles N non premières (plusieurs rayons visitent alors le même pixel) [101]. Le fait d'avoir la même formule d'inversion globale pour la transformée Mojette et pour la FRT renforce, si besoin était, le lien entre ces deux transformations.

3.5.2 Interprétation matricielle

Nous avons présenté à la section 2.5.6 la matrice de projection/rétroprojection Mojette $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ sous une forme Toeplitz bloc Toeplitz. Dans le cas où l'on dispose des projections sur la séquence de Farey-Haros complète d'ordre $N-1$ et des angles symétriques, cette matrice prend une forme beaucoup plus simple.

Soit $\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{p,q}$ une telle matrice pour la projection d'angle (p,q). Afin de simplifier le discours, nous allons considérer une image de taille 3×3 par la suite. Les matrices $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ pour chaque angle sont illustrées dans le tableau 3.29. En les sommant, nous obtenons la matrice suivante :

$$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{tot} = 7I_9 + J_9$$

où $\mathbf{I}_9$ est la matrice identité et $\mathbf{J}_9$ est la matrice de taille 9×9 remplie de 1. Cette matrice a pour effet de sommer toutes les composantes d'un vecteur.

En étendant au cas général, nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^*\mathbf{M}_{tot}\boldsymbol{f} &= (n-1)\mathbf{I}_{N^2} + \mathbf{J}_{N^2}\boldsymbol{f} \\ &= (n-1)\boldsymbol{f} + s\begin{pmatrix}1 \cdots 1\end{pmatrix}^\top \end{aligned}$$

où n est le nombre total d'angles discrets contenus dans l'image et s désigne la somme de tous les pixels de $\boldsymbol{f}$. Ce qui nous conduit à une expression similaire à l'équation (3.15) :

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{n-1}\left[\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{tot}\boldsymbol{f} - s\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}\right] \tag{3.16}$$

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(0,1)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
 & & & 1 & 1 & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(1,0)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & 1 & & & 1 & & \\
 & 1 & & & 1 & & & 1 & \\
 & & 1 & & & 1 & & & 1 \\
\hline
1 & & & 1 & & & 1 & & \\
 & 1 & & & 1 & & & 1 & \\
 & & 1 & & & 1 & & & 1 \\
\hline
1 & & & 1 & & & 1 & & \\
 & 1 & & & 1 & & & 1 & \\
 & & 1 & & & 1 & & & 1
\end{array}$$

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(1,1)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & & 1 & & & & 1 \\
 & 1 & & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & & & & 1 & \\
1 & & & & 1 & & & & 1 \\
 & 1 & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & 1 & \\
1 & & & & 1 & & & & 1
\end{array}$$

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(-1,1)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
\hline
 & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
\hline
 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}$$

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(1,2)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & & & & & 1 & \\
 & 1 & & & & & & & 1 \\
 & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & & \\
1 & & & & & & & 1 & \\
 & 1 & & & & & & & 1
\end{array}$$

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(-1,2)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & & & & & & \\
 & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & & 1 & \\
\hline
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & 1 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}$$

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(-1,1)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & \\
\hline
 & & & 1 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & & & & \\
1 & & & & & 1 & & & \\
\hline
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & & & & & 1
\end{array}$$

$\mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(1,2)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & & & \\
\hline
 & & 1 & 1 & & & & & 1 \\
 & & & & 1 & & & & \\
1 & & & & & 1 & 1 & & \\
\hline
 & & & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & 1
\end{array}$$

$\sum \mathbf{M}^*\mathbf{M}_{(p,q)}$

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8
\end{array}$$

Tableau 3.29 – Matrices $\mathbf{M}^*\mathbf{M}$ pour toutes les directions discrètes dans une image de taille 3×3

3.6 Conclusion

Nous nous sommes attachés à montrer dans ce chapitre que la géométrie discrète n'est pas une simple discrétisation de la théorie continue mais qu'elle fournit des outils formels pour exprimer le problème de tomographie discrète Mojette. Grâce à ces outils, nous avons vu qu'il était possible de réduire, en un problème fini, à la fois le caractère infini du nombre de solutions en tomographie classique et le caractère infini du nombre de projections nécessaire à une reconstruction exacte de l'image de départ.

La morphologie mathématique et, en particulier, les éléments structurants à deux pixels premiers, base des droites discrètes, permettent de caractériser l'espace nul de l'opérateur de transformée Mojette pour une forme convexe. Ainsi, il est possible d'exprimer l'ensemble des reconstructions compatibles avec les projections discrètes sous la forme d'une somme directe entre :

— une seule image regroupant toute l'information connue dans les projections ;
— le noyau de l'opérateur, décomposé lui-même en une somme finie de composantes où le même fantôme est localisé sur un point différent.

La notion de points visibles dans l'espace discret et son équivalence avec les séquences de Farey-Haros montre qu'il existe un nombre fini d'angles discrets dans un compact du plan discret. Le nombre de projections nécessaires à une reconstruction exacte devient donc fini dans le cadre de la tomographie Mojette discrète.

Ces résultats issus de l'état de l'art confortent l'idée de préférer la notion de transformée exacte discrète pour la tomographie sur des données discrètes et un support fini. Bien que non développés explicitement dans nos contributions, ils donnent un cadre théorique formel à notre problème et justifient la suite de nos travaux quant à l'utilisation de la transformée Mojette comme outil de tomographie et de représentation de l'espace discret.

Chapitre 4

Transformations discrètes et l'espace de projection Mojette

Dans ce chapitre, nous utilisons la formulation de la transformée Mojette discrète pour décrire formellement des transformations affines dans l'espace de projections Mojette, espace de représentation du plan discret.

Sommaire

4.1 Introduction et motivations

La transformée Mojette peut être utilisée comme une représentation exacte et finie de l'espace discret. Dans ce chapitre, nous proposons donc de construire des opérateurs dans cet espace de représentation constitués des projections Mojette de l'espace discret, qu'on appelle *espace Mojette*. Ces opérateurs permettront de manipuler de manière exacte l'espace discret dans cette nouvelle représentation. Plus précisément, nous définissons les opérateurs de translation, de rotation et d'homothétie.

Ces algorithmes de transformations discrètes se basent sur plusieurs travaux issus de la géométrie discrète qui démontrent l'utilité de réduire ou d'éliminer les étapes de ré-échantillonnage et d'interpolation lors de rotations d'images [126, 151]. En effet, en considérant uniquement des angles discrets et en s'autorisant un changement d'échelle, il devient possible d'effectuer une rotation d'image exacte, dans l'espace image ou dans l'espace des projections, dans le sens où aucune interpolation n'est requise [155, 159].

En considérant ces deux nouveautés, nous pouvons imaginer tirer parti d'une série de transformations affines exactes des données de projections tomographiques, une fois que celles-ci ont été transposées dans le domaine de projections Mojette. Ainsi, après un bref rappel de la théorie liée à la transformée Mojette, nous définissons des translations discrètes et exactes, des rotations et des mises à l'échelle dans l'espace de projections Mojette. Nous nous attachons à montrer en quoi ces techniques restent exactes — à partir des hypothèses précédentes — et nous les illustrons à travers quelques exemples. Enfin, nous développons une discussion théorique à propos de ces transformations affines.

Dans ce chapitre, le domaine de travail est un plan réel $\mathcal{P}$ (assimilable à $\mathbb{R}^2$) et un plan discret $\mathcal{P}_D$ (assimilable à $\mathbb{Z}^2$).

4.2 Translations discrètes

La première opération que nous définissons est la translation discrète dans l'espace Mojette.

4.2.1 Définition

La translation est une transformation affine du plan. Elle est définie par un vecteur de translation $\boldsymbol{u} \in \mathcal{P}$ telle que :

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{P},\ \mathrm{T}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}. \tag{4.1}$$

L'image de toute partie du plan $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$ par une translation de vecteur $\boldsymbol{u}$ est notée :

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{u}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathcal{P} \mid \boldsymbol{y} - \boldsymbol{u} \in \mathcal{D}\}. \tag{4.2}$$

Dans le plan discret $\mathcal{P}_D$, cette définition tient toujours en choisissant $\boldsymbol{u} \in \mathcal{P}_D$. Ainsi, la translation discrète par un vecteur discret, que nous appellerons *translation entière* s'énonce de la même manière et conserve les propriétés de la translation réelle. Elle est réversible par la translation de vecteur $-\boldsymbol{u}$.

4.2.2 Translations dans l'espace de Radon discret

Nous avons introduit dans les chapitres précédents la transformée de Radon ainsi que l'espace engendré par cet opérateur, que nous appelons *sinogramme*.

Observons à présent l'effet d'une translation dans l'espace objet sur le sinogramme. La transformée de RADON de l'image translatée est

$$\begin{aligned}
&\forall \rho \in \mathbb{R},\ \forall \theta \in [0, \pi[,\\
&\qquad \mathcal{R}\,\mathrm{T}_{(u,v)}(f)(\rho,\theta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{T}_{(u,v)}(f)(x,y)\delta\left(\rho + x\sin\theta - y\cos\theta\right)\,dx\,dy\\
&\qquad = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x+u, y+v)\delta\left(\rho + x\sin\theta - y\cos\theta\right)\,dx\,dy\\
&\qquad = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta\left(\rho + (x-u)\sin\theta - (y-v)\cos\theta\right)\,dx\,dy\\
&\qquad = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\delta\left((\rho - u\sin\theta + v\cos\theta) + x\sin\theta - y\cos\theta\right)\\
&\qquad\qquad dx\,dy\\
&\qquad = \mathcal{R}f(\rho - u\sin\theta + v\cos\theta, \theta).
\end{aligned} \tag{4.3}$$

L'image d'un point de l'espace objet dans un sinogramme est une sinusoïde. Ainsi, et comme le montre l'équation (4.3), la translation d'un point $\mathrm{T}_{\boldsymbol{u}}$ dans l'espace image peut être vue comme une translation de chaque ligne du sinogramme. En d'autres termes,

$$\mathcal{R}_\theta \left[\mathrm{T}_{(u,v)}\, f\right] = \mathrm{T}_{v\cos\theta - u\sin\theta}\left[\mathcal{R}_\theta f\right]. \tag{4.4}$$

4.2.3 Translations dans l'espace Mojette

Dans l'espace image, une translation par un vecteur d'entiers (u, v) revient à décaler chaque pixel de l'image par ce vecteur. Le support de cette image est donc également translaté. Ainsi, une image de support $[k_{\min} \dots k_{\max}] \times [l_{\min} \dots l_{\max}]$ est translaté en une image de support $[k_{\min} + u \dots k_{\max} + u] \times [l_{\min} + v \dots l_{\max} + v]$. Examinons à présent l'effet d'une translation d'image sur la transformées Mojette.

Soit f une image discrète de taille $W \times H$ et $\mathrm{T}_{(u,v)}\, f$ son translaté par le vecteur (u, v). La transformée Mojette de $\mathrm{T}_{(u,v)}\, f$ dans la direction (p, q) est, pour $b \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(p,q)}\left[\mathrm{T}_{(u,v)}\, f\right](b) &= \sum_{k=u}^{W+u-1} \sum_{l=v}^{H+v-1} \left[\mathrm{T}_{(u,v)}\right] f(k,l)\Delta(b + kq - lp) \\
&= \sum_{k'=0}^{W-1} \sum_{l'=0}^{H-1} \left[\mathrm{T}_{(u,v)}\right] f(k'-u, l'-v)\Delta\Big(b + (k'-u)q - (l'-v)p\Big) \\
&= \sum_{k'=0}^{W-1} \sum_{l'=0}^{H-1} f(k', l')\Delta\Big((b - uq + vp) + k'q - (l'-v)p\Big) \\
&= \mathcal{M}_{(p,q)} f(b - uq + vp) \\
&= \mathrm{T}_{vp-uq}\left[\mathcal{M}_{(p,q)} f\right](b),
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{M}_{(p,q)}\left[\mathrm{T}_{(u,v)}\, f\right] = \mathrm{T}_{vp-uq}\left[\mathcal{M}_{(p,q)} f\right]. \tag{4.5}$$

En d'autres termes, la transformée Mojette d'une image translatée par un vecteur (u, v) est égale à la translation, en une dimension, des bins de chaque projection d'angle (p, q) par une quantité $vp - uq$.

4.3 Rotations discrètes

Après avoir défini l'opération de translation dans l'espace Mojette, concentrons-nous sur les rotations discrètes. Dans cette section, nous introduisons dans un premier temps la rotation « zoomée » dans les espaces image et Mojette. Ce processus introduisant un sur-échantillonnage de l'image, nous détaillons une méthode pour remplir celle-ci, ainsi que ses projections Mojette de manière cohérente avec le domaine image. Enfin, nous nous intéressons au cas des rotations successives et de la rotation inverse.

4.3.1 Rotation discrète dans l'espace image

Dans sa forme générale, une rotation est une transformation affine du plan $\mathcal{P}$, définie par un centre $\boldsymbol{c} \in \mathcal{P}$ et un angle $\vartheta \in [0, 2\pi[$, pouvant être décrite par la composition de trois transformations élémentaires — à savoir, une translation de vecteur $\boldsymbol{c}$, une rotation vectorielle d'angle ϑ et une translation de vecteur $-\boldsymbol{c}$. Ayant déjà défini ces translations, nous ne détaillerons ici que les rotations vectorielles.

Dans le plan $\mathcal{P}$, une rotation vectorielle d'angle ϑ est l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Rot}_\vartheta \colon \mathcal{P} &\to \mathcal{P} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_\vartheta} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Cette définition n'est pas directement applicable à l'espace discret. En effet, l'espace discret n'est en général pas stable pour l'application définie par l'équation (4.6). C'est-à-dire que la rotation continue d'un point discret ne correspond pas nécessairement à un autre point de la grille discrète, comme nous pouvons le voir à la figure 4.1.

Dans l'ensemble de cette thèse, nous utilisons des angles discrets définis par un couple d'entiers relatifs pour représenter de manière cohérente des directions dans la grille discrète. Afin d'obtenir une formulation discrète de l'opération de rotation discrète, nous restreignons une nouvelle fois l'ensemble des angles admissibles aux

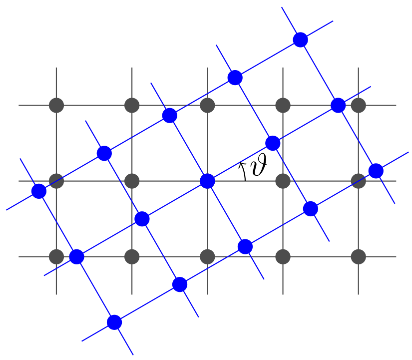


FIGURE 4.1 – Rotation continue d'angle $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ d'une grille discrète

seuls angles discrets. Notons que cette restriction n'est pas préjudiciable pour la précision angulaire, car l'ensemble des nombres rationnels étant dense dans l'ensemble des nombres réels, il est possible d'approcher n'importe quel nombre réel par un nombre rationnel avec une précision arbitrairement grande. C'est-à-dire que quel que soit $x \in \mathbb{R}$ et quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un couple d'entiers relatifs (p, q) tel que $\left| x - \frac{q}{p} \right| < \varepsilon$. Ainsi, pour n'importe quel angle réel ϑ, il existe un angle discret (p, q) tel que $\left| \tan \vartheta - \frac{q}{p} \right| < \varepsilon$, ce qui par continuité de la fonction tangente équivaut à l'approximation de ϑ. D'autre part, contrairement aux directions de projections pour la transformée Mojette, nous nous autorisons ici à utiliser l'ensemble des angles discrets sur $[0, 2\pi[$. Dans la suite, nous noterons $(p_\vartheta, q_\vartheta)$ l'angle discret de rotation afin d'éviter toute confusion avec une direction de projection Mojette.

Avec cette discrétisation des angles, la matrice de rotation de l'équation (4.6) devient :

$$\frac{1}{\sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2}} \begin{pmatrix} p_\vartheta & -q_\vartheta \\ q_\vartheta & p_\vartheta \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

L'utilisation des angles discrets permet d'assurer que l'angle ϑ possède un cosinus et un sinus rationnels. Il nous semble intéressant de mentionner le cas particulier où p_ϑ, q_ϑ et $\sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2}$ forment un triplet pythagoricien. Dans ce cas, $\sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2}$ est entier, et la rotation est exacte tous les $\sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2}$ points. Ces triplets jouent un rôle important en géométrie discrète et sont à la base de plusieurs formes de rotations discrètes [9, 126].

Ici, nous ne faisons pas l'hypothèse de triplets pythagoriciens et nous appliquons la discrétisation proposée par I. SVALBE dans [155]. Ainsi, nous nous affranchissons du facteur $\frac{1}{\sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2}}$ dans l'équation (4.7), et la transformation devient :

$$\begin{aligned} \mathrm{Rot}_{(p_\vartheta, q_\vartheta)} &: \mathcal{P}_D \to \mathcal{P}_D \\ &\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} p_\vartheta & -q_\vartheta \\ q_\vartheta & p_\vartheta \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}_{(p_\vartheta, q_\vartheta)}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ceci est équivalent à un changement d'échelle lors de la transformation. La grille résultante est alors une version tournée et mise à l'échelle d'un facteur $\sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2}$ par rapport à la grille initiale, de manière à ce que chaque point de la grille transformée coïncide avec un point discret de la grille initiale. La transformation ainsi définie — que nous qualifions encore abusivement de rotation — perd par contre la propriété d'isométrie. Cette opération est illustrée à la figure 4.2, où les points discrets sur la grille bleue correspondent à la rotation de la portion délimitée par des pointillés sur la grille initiale.

Considérons à présent une image rectangulaire de taille $W \times H$. La taille $W' \times H'$ de l'image résultante par cette transformation est la taille de la boite englobante de la rotation de tous les points discrets de l'image initiale. Pour obtenir ces grandeurs, commençons par remarquer qu'elles sont invariantes par translation de l'image. De plus, étant données les symétries du problème, nous pouvons nous contenter de considérer le cas $0 < q_\vartheta < p_\vartheta$. Nous supposons donc que l'image initiale est décrite sur le support $[0 \ldots W-1] \times [0 \ldots H-1]$ et les points extrêmes dans la direction horizontale de l'image transformée correspondent au coin inférieur droit et au coin supérieur gauche de l'image initiale. L'image de ces points par $R_{(p_\vartheta, q_\vartheta)}$ est respectivement $(p_\vartheta(W-1), q_\vartheta(W-1))$ et $(-q_\vartheta(H-1), p_\vartheta(H-1))$. La largeur de l'image résultante est donc $W' = p_\vartheta(W-1) + q_\vartheta(H-1) + 1$. De même, pour déterminer la hauteur de l'image résultante, nous considérons le coin inférieur gauche et le coin supérieur droit de l'image initiale, dont les coordonnées après rotation sont respectivement $(0,0)$ et $(p_\vartheta(W-1) - q_\vartheta(H-1), q_\vartheta(W-1) + p_\vartheta(H-1))$. La

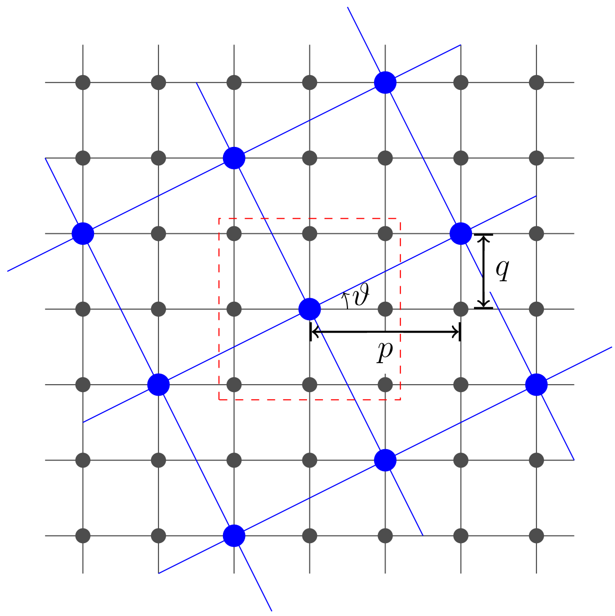


FIGURE 4.2 – Rotation discrète d'angle $(2, 1)$ avec agrandissement de facteur $\sqrt{5}$

hauteur de l'image résultante est donc $H' = p_\vartheta(H-1) + q_\vartheta(W-1) + 1$.

Donc dans le cas général, la taille de l'image après rotation devient :

$$\begin{cases} W' = |p_\vartheta|(W-1) + |q_\vartheta|(H-1) + 1 \\ H' = |q_\vartheta|(W-1) + |p_\vartheta|(H-1) + 1. \end{cases} \tag{4.9}$$

Nous pouvons remarquer que dans cette équation, la largeur W' est égale au nombre de bins d'une projection Mojette de direction $(p, q) = (p_\vartheta, |q_\vartheta|)$ sur l'image initiale. De même, la hauteur H' est égale au nombre de bins d'une projection Mojette de direction $(p, q) = (q_\vartheta, |p_\vartheta|)$ sur l'image initiale.

Un exemple de cette rotation sur une image est donné par la figure 4.3. Ici, l'angle de rotation est $(p_\vartheta, q_\vartheta) = (2, 1)$. La figure 4.3b présente le résultat de la rotation discrète de l'image à la figure 4.3a. Le facteur d'échelle $\sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2} = \|(p_\vartheta, q_\vartheta)\|_2$ dans l'espace image correspond à la distance euclidienne entre deux pixels initialement 1-voisins. Cette transformation est clairement injective, mais certainement pas surjective. Les pixels *additionnels* (ceux qui n'ont pas d'antécédent dans l'image de départ) sont initialisés à une valeur nulle.

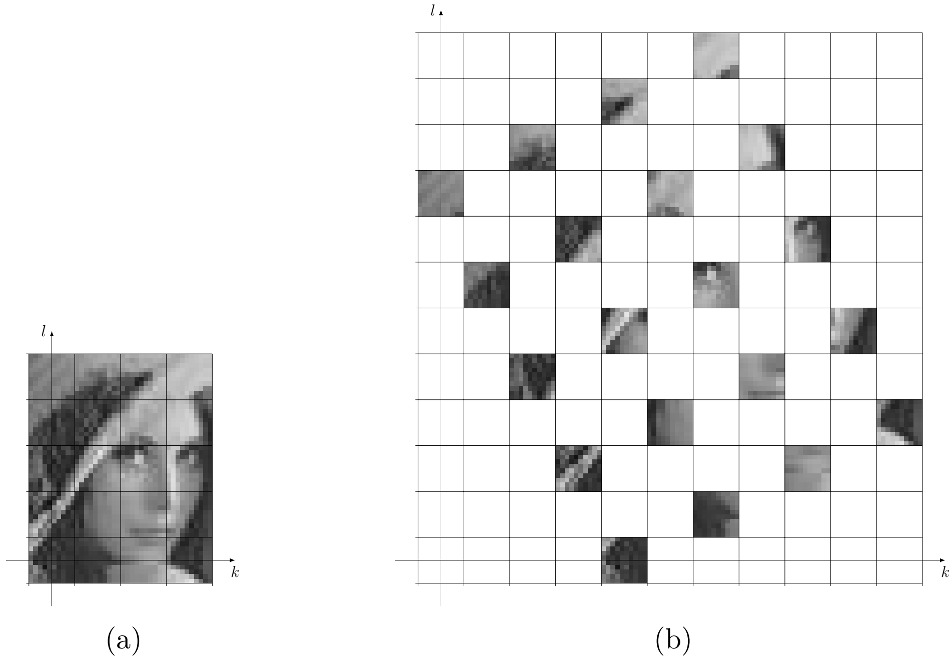


FIGURE 4.3 – (a) Image de 4×5 pixels et (b) Image résultante d'une rotation discrète d'angle $(2, 1)$ de taille 11×12 pixels

Malgré le fait que la rotation discrète ainsi définie ne constitue pas une bijection à proprement parler, nous pouvons la rendre réversible car chaque pixel du domaine d'arrivée correspond à un unique pixel de l'image originale, sans interpolation. Ainsi, étant donnée l'image transformée, il est possible de retrouver exactement l'image originale en effectuant une rotation inverse surjective d'angle opposé $(p_\vartheta, -q_\vartheta)$ [155]. Pour la transformation inverse, nous pouvons facilement inverser $\mathbf{R}_{(p_\vartheta,q_\vartheta)}$ en remarquant que $\mathbf{R}_\vartheta^{-1} = \mathbf{R}_\vartheta^\top$. Ainsi, chaque pixel (k, l) est obtenu à partir des pixels (k', l') lorsque le résultat de $\mathbf{R}^{-1}_{(p_\vartheta,q_\vartheta)} \times \begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix}$ est à valeurs entières. On a donc :

$$\begin{pmatrix} k \\ l \end{pmatrix} = \frac{1}{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2} \begin{pmatrix} p_\vartheta & q_\vartheta \\ -q_\vartheta & p_\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k' \\ l' \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

4.3.2 Rotation discrète dans l'espace Mojette

Après avoir défini la transformation de rotation discrète couplée à un facteur d'échelle dans l'espace image, nous allons montrer qu'elle peut être mise en œuvre de manière équivalente en ne manipulant que les projections discrètes Mojette de l'image.

4.3.2.1 Définition

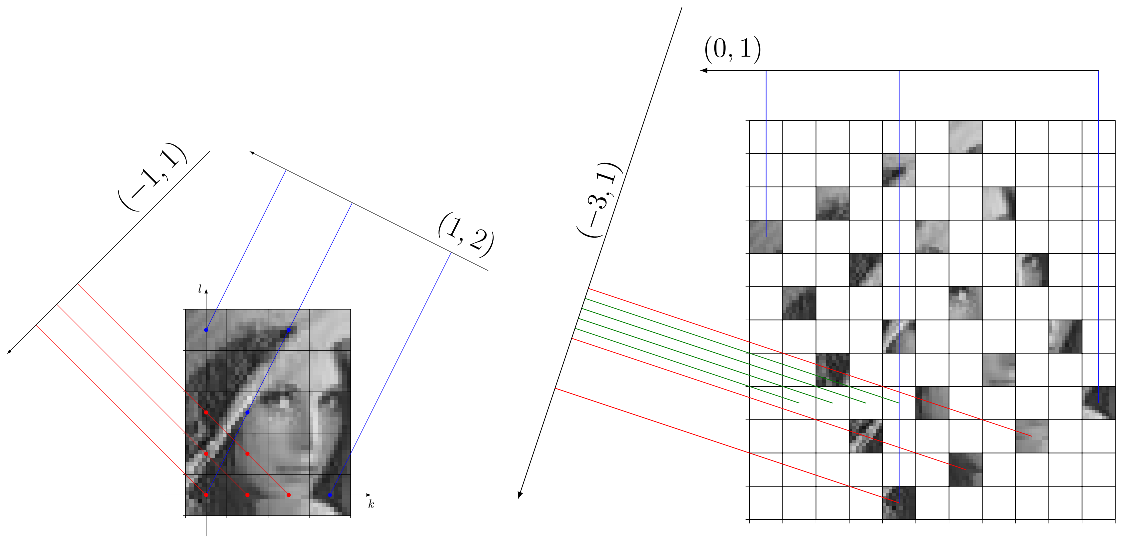
Dans l'espace des projections Mojette, la rotation $\mathrm{Rot}_{(p_\vartheta,q_\vartheta)}$ d'une image transforme toutes les projections de celle-ci. D'abord, observons que dans la figure 4.3, la projection Mojette horizontale d'angle $(1,0)$ de l'image transformée par rotation d'angle $(2,1)$ correspond exactement à la projection Mojette d'angle $(-2,1)$ de l'image originale. Nous pouvons en dire de même pour la projection orthogonale $(0,1)$ de l'image transformée, qui correspond à la projection Mojette d'angle $(1,2)$ de l'image initiale. Ces relations sont d'autant plus renforcées que les nombres de bins des projections Mojette d'angle (p,q) et (q,p) d'une image de taille $W \times H$ correspondent à la largeur et à la hauteur de l'image transformée par rotation d'angle (p,q), telles qu'elles sont données à l'équation (4.9).

En utilisant le fait que cette rotation transforme une droite 1-connexe en une droite pq-connexe, nous pouvons voir sur la figure 4.3 que certains bins de projection Mojette de direction d'angle $(2,1)$ de l'image transformée correspondent aux bins de la transformée Mojette de direction $(1,0)$ sur l'image initiale. Cependant dans ce cas, la projection Mojette $(2,1)$ de l'image transformée contient plus de bins que la projection Mojette $(1,0)$ de l'image initiale. Ces bins ne somment que des pixels introduits par le sur-échantillonnage et ont donc une valeur nulle.

Ces observations peuvent être généralisées pour des directions de projection quelconques. Ainsi la rotation de l'image a pour effet dans l'espace des projections Mojette de transformer une projection de direction (p,q) une nouvelle projection de direction (p',q') définie par :

$$\begin{pmatrix} p' \\ q' \end{pmatrix} = \frac{1}{\mathrm{pgdc}(p_\vartheta p - q_\vartheta q, q_\vartheta p + p_\vartheta q)} \begin{pmatrix} p_\vartheta & -q_\vartheta \\ q_\vartheta & p_\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Par exemple sur la figure 4.4b, la projection $(-1, 1)$ à laquelle on applique la rotation d'angle $(p_\vartheta, q_\vartheta) = (2, 1)$ donne la projection $(-3, 1)$.



(a) (b)

FIGURE 4.4 – (a) Image de 4×5 pixels avec deux projections Mojette de directions $(-1, 1)$ et $(1, 2)$. (b) Image résultante d'une rotation discrète d'angle $(2, 1)$ de taille 11×12 pixels. Les deux projections Mojette de directions $(-1, 1)$ et $(1, 2)$ deviennent respectivement $(-3, 1)$ et $(0, 1)$. Dans l'espace Mojette, la rotation entraîne un sur-échantillonnage de certaines projections, représenté par les lignes vertes.

Notons toutefois que les directions discrètes (p', q') ainsi calculées ont valeur dans $[0, 2\pi[$. Dans ce cas, nous pouvons considérer la transformée Mojette symétrique en q, comme la transformée de RADON. Il suffit alors de considérer la direction discrète $\varepsilon(q')(p', q')$, où ε est la fonction signe et de retourner le signal obtenu. Cependant par souci de clarté, nous omettrons ces étapes dans les développements de ce chapitre.

Soit f une image discrète et $f' = \mathrm{R}_{(p_\vartheta, q_\vartheta)}(f)$. La transformée Mojette de f dans la direction (p,q) s'exprime par :

$$\forall b \in \mathbb{Z},\ \mathcal{M}_{(p,q)}(b) = \sum_{k=0}^{W-1} \sum_{l=-\infty}^{H-1} f(k,l)\Delta(b+kq-lp) \tag{4.12}$$

$$= \sum_{k=0}^{W-1} \sum_{l=0}^{H-1} f'(\underbrace{kp_\vartheta - lq_\vartheta}_{k'}, \underbrace{kq_\vartheta + lp_\vartheta}_{l'})\Delta(b+kq-lp) \tag{4.13}$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} f'(k',l')\Delta(b+kq-lp) \tag{4.14}$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} f'(k',l')\Delta\left(b + q\frac{k'p_\vartheta + l'q_\vartheta}{p_\vartheta^2+q_\vartheta^2} - p\frac{-kq_\vartheta + lp_\vartheta}{p_\vartheta^2+q_\vartheta^2}\right) \tag{4.15}$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} f'(k',l')\Delta\left(b\left(p_\vartheta^2+q_\vartheta^2\right) + k'(pq_\vartheta + qp_\vartheta q) -l'(pp_\vartheta - qq_\vartheta)\right). \tag{4.16}$$

En posant $d = \mathrm{pgdc}(pp_\vartheta - qq_\vartheta, pq_\vartheta + qp_\vartheta q)$, nous avons

$$\begin{cases} pq_\vartheta + qp_\vartheta q = q'd, \\ pp_\vartheta - qq_\vartheta = p'd, \end{cases}$$

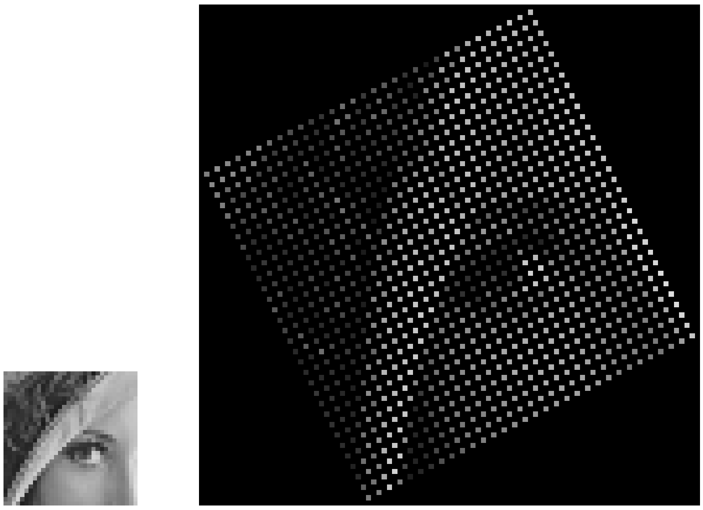
et donc

$$\forall b \in \mathbb{Z},\ \mathcal{M}_{(p,q)}(b) = \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} f'(k',l')\Delta\left(b \underbrace{\frac{p_\vartheta^2+q_\vartheta^2}{d}}_{S_{(p_\vartheta,q_\vartheta)}(p,q)} + k'q' - l'p'\right) \tag{4.17}$$

$$= \mathcal{M}_{(p',q')} f'\left(bS_{(p_\vartheta,q_\vartheta)}(p,q)\right). \tag{4.18}$$

L'équation (4.18) montre que l'on peut obtenir les projections Mojette de f' à partir des projections de f. Ainsi, nous définissons la rotation dans l'espace Mojette d'angle $(p_\vartheta, q_\vartheta)$ consistant à associer de manière injective chaque bin b de chaque projection (p,q) au bin $b' = b \times S_{(p_\theta,q_\theta)}(p',q')$ de la projection correspondante (p',q'). En utilisant l'ensemble $P' = \left\{(p',q')\right\}$ des projections obtenues par rotation, l'image peut être reconstruite de manière exacte sur le support de l'image résultant de la rotation en utilisant l'algorithme de Mojette inverse NORMAND.

La figure 4.5a décrit une image de 32×32 pixels. L'acquisition des projections Mojette est effectuée sur les angles discrets donnés par la suite de FAREY-HAROS d'ordre cinq $\mathcal{F}_5$ et ses symétries par rapport à la première bissectrice du plan, puis par rapport à l'axe des y. Un tel ensemble vérifie le critère de KATZ pour cette taille d'image. Ensuite, ces projections subissent une rotation d'angle $(2, 1) \in \mathcal{F}_5$. La reconstruction à l'aide de l'algorithme Mojette inverse NORMAND de l'image résultante à partir des projections transformées dans l'espace Mojette est donnée par la figure 4.5b.



(a) (b)

FIGURE 4.5 – (a) Image originale de taille 32×32. (b) Rotation dans l'espace Mojette d'angle $(2, 1)$, de taille 94×94

4.3.3 Remplissage des pixels nuls

La rotation que nous avons définie jusqu'ici se présente comme une application injective de l'ensemble des pixels de l'image originale à un sous-ensemble des pixels de l'image d'arrivée. Cette correspondance incomplète détruit les relations de connexité des pixels dans l'image et donc la topologie discrète. Les zones de pixels sans antécédent dans l'image initiale, dus au sur-échantillonnage, autour des pixels issus de la rotation peuvent être remplis par interpolation.

4.3.3.1 Dans l'espace image

Dans l'espace image, nous pouvons voir cette étape comme une convolution discrète avec un noyau de convolution bidimensionnel. Ce noyau de convolution peut être construit d'une infinité de manières différentes. Nous adoptons ici le même choix que dans [155], en considérant la cellule de Voronoï des points discrets obtenus après rotation. Du point de vue du pavage dual à la grille discrète, donc des pixels, ces cellules peuvent être considérées comme le résultat de la rotation d'un pixel. Les valeurs du masque de convolution sont calculées par la fraction de recouvrement entre un pixel du pavage initial et le résultat de la rotation d'un de ces pixel. Des exemples de cette construction sont présentés à la figure 4.6.

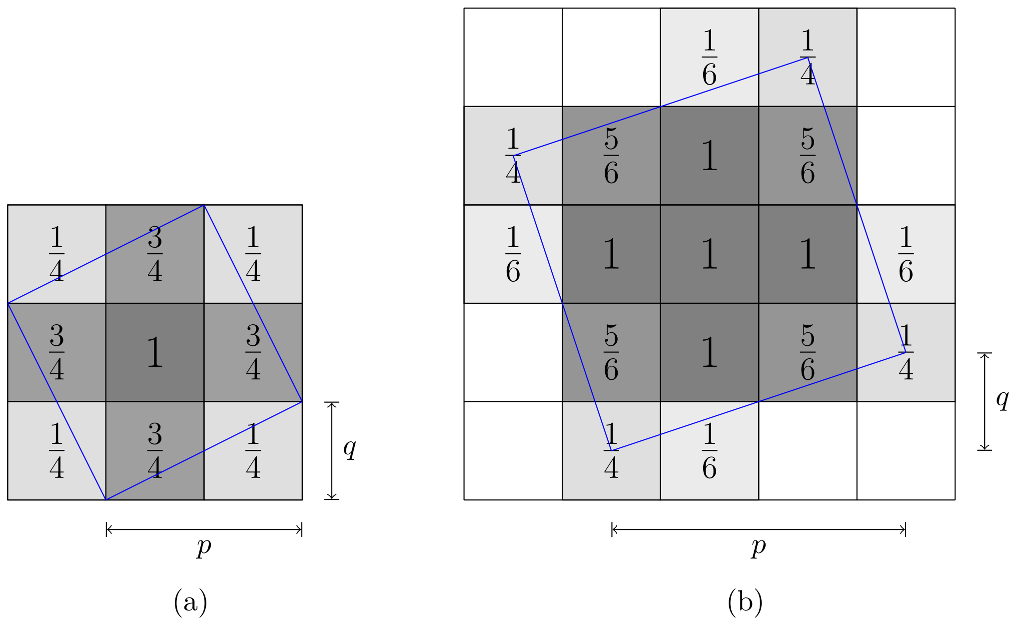


Figure 4.6 – Représentation d'une cellule Voronoï (contourée en bleu) du maillage obtenu par rotation d'angles $(2, 1)$ (a) et $(3, 1)$ (b). Les valeurs indiquent la fraction de recouvrement entre cette cellule et les pixels de l'image.

La taille de ce masque de convolution est de $W_M \times H_M$ pixels, où pour un angle de rotation $(p_\vartheta, q_\vartheta,)$

$$W_M = H_M = \begin{cases} |p_\vartheta| + |q_\vartheta| & \text{si } p_\vartheta \text{ ou } q_\vartheta \text{ est pair} \\ |p_\vartheta| + |q_\vartheta| + 1 & \text{si } p_\vartheta \text{ et } q_\vartheta \text{ sont impairs.} \end{cases} \tag{4.19}$$

Nous allons maintenant proposer une méthode de calcul efficace de ce masque de convolution. Nous pouvons voir dans la figure 4.7 que l'aire commune entre la transformation d'un pixel et le pavage initial — symbolisée en hachures sur la figure de gauche — correspond à l'aire sous la courbe de la projection d'un pixel. Cette projection prend la forme d'un trapèze dont l'équation analytique est connue (cf. équation (A.28) de l'annexe A).

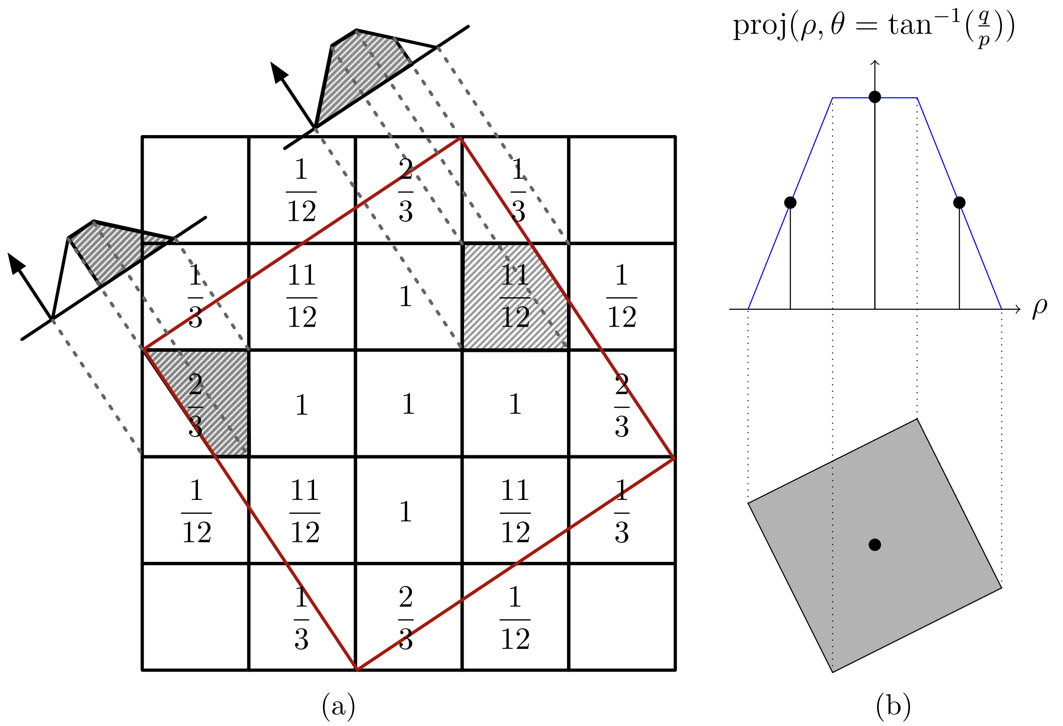


FIGURE 4.7 – (a) L'aire commune entre le pixel transformé et les pixels du pavage initial est égale à l'aire sous la courbe du trapèze délimitée par les droites de directions $(p_\vartheta, q_\vartheta)$ et $(-q_\vartheta, p_\vartheta)$. (b) Trapèze issu de la projection continue d'un pixel dans la direction $(2, 1)$

Le bord de la cellule de VORONOÏ la plus proche se projète sur le trapèze à la coordonnée

$$\rho\left(p_\vartheta, q_\vartheta, k_\mathrm{M}, l_\mathrm{M}\right) = \frac{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2}{2} - \max \begin{Bmatrix} -q_\vartheta k'_\mathrm{M} + p_\vartheta l'_\mathrm{M} \\ q_\vartheta k'_\mathrm{M} - p_\vartheta l'_\mathrm{M} \\ p_\vartheta k'_M + q_\vartheta l'_M \\ -p_\vartheta k'_M - q_\vartheta l'_M \end{Bmatrix}, \tag{4.20}$$

où $(k'_\mathrm{M}, l'_\mathrm{M}) = \left(k_\mathrm{M} - \left\lfloor \frac{|p_\vartheta|+|q_\vartheta|}{2} \right\rfloor, l_\mathrm{M} - \left\lfloor \frac{|p_\vartheta|+|q_\vartheta|}{2} \right\rfloor\right)$.

Les poids du masque de convolution sont donc déterminés par l'intégration du trapèze jusqu'à $\rho\left(p_\vartheta, q_\vartheta, k_\mathrm{M}, l_\mathrm{M}\right)$.

4.3.3.2 Remplissage des bins sur les projections

La transformée Mojette partage la propriété de convolution de la transformée de Radon, c'est-à-dire que la projection Mojette de $f \underline{*} g$ est égale à la convolution discrète des projections Mojette de f et g [72]. Nous utilisons cette propriété pour effectuer l'opération de convolution directement dans l'espace des projections Mojette, sans avoir à revenir dans le domaine image. Ainsi pour compléter les bins d'une projection d'angle (p, q), il suffit de projeter le masque de convolution déterminé dans la section précédente et de convoluer chaque projection de l'image avec la projection du masque de convolution. En guise d'illustration, l'image de la figure 4.8 est obtenue par reconstruction Mojette inverse Normand des projections obtenues par rotation dans l'espace Mojette d'angle $(2, 1)$.

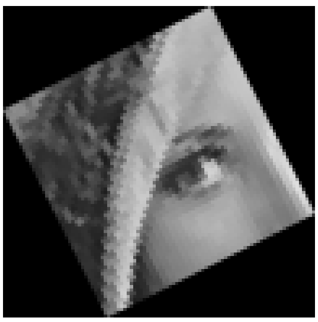


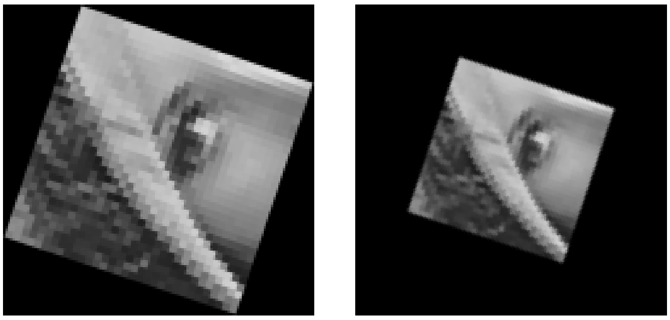
Figure 4.8 – Rotation dans l'espace Mojette d'angle $(2, 1)$ avec remplissage des bins créés sur les projections puis reconstruction Mojette inverse Normand

4.3.4 Rotations inverses et successives

La rotation continue étant transitive, nous nous demandons s'il en est de même pour les rotations discrètes définies ici.

La rotation discrète de l'image de la figure 4.5a par un angle discret $(1, 3)$ donne l'image de taille 129×129 pixels de la figure 4.9a. Une rotation similaire peut être réalisée en effectuant successivement deux rotations discrètes d'angles $(2, 1)$ puis $(1, 1)$, mais résultant en une image de taille 193×193 (figure 4.9b). Plus généralement, le support de l'image (avec interpolation) issu de deux rotations successives d'angles ϑ_1 et ϑ_2 est de taille $W_{\vartheta_1\vartheta_2} \times H_{\vartheta_1\vartheta_2}$ supérieure à la taille du support $W_\vartheta \times H_\vartheta$ obtenu par une unique rotation discrète d'angle $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$. La zone « utile » de l'image, celle contenant de l'information, est néanmoins la même dans les deux cas. Ainsi, le facteur d'échelle reste le même (ou est un multiple entier) quelle que soit la séquence de rotation choisie pour obtenir la rotation globale d'angle $(p_\vartheta, q_\vartheta)$. Notons ici que les angles discrets s'additionnent par

$$(p, q) = (p_1 p_2 - q_1 q_2, q_1 p_2 + p_1 q_2).$$



(a) (b)

FIGURE 4.9 – (a) Rotation directe dans l'espace Mojette d'angle $(1, 3)$ donnant une 129×129 image. (b) Même résultat obtenu par rotations successives d'angles $(2, 1)$ et $(1, 1)$, avec une taille d'image finale de 193×193.

L'opération de rotation inverse est généralement effectuée lorsque l'opération directe ne correspond pas aux besoins de l'utilisateur. Une rotation inverse d'angle $(p_\vartheta, q_\vartheta)$, définie en réalité par l'angle opposé $(p_\vartheta, -q_\vartheta)$, peut être vue comme une

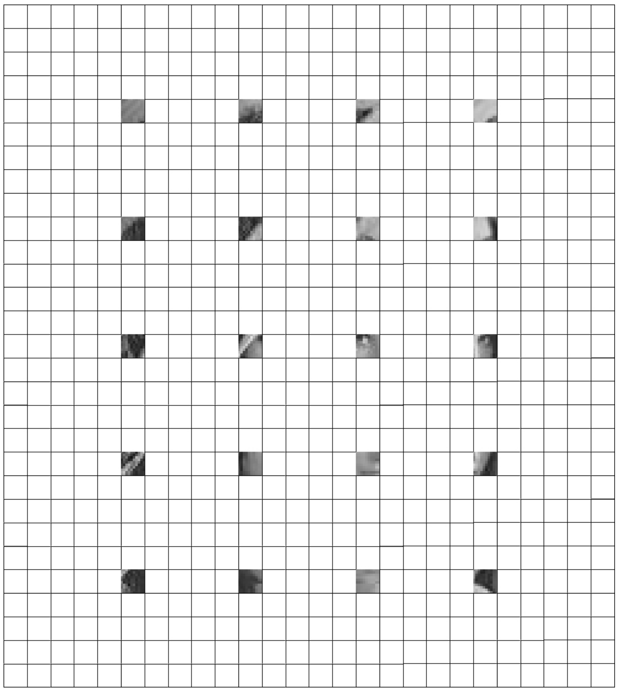


FIGURE 4.10 – Rotation par l'angle opposé sur la figure 4.4b. Le sur-échantillonnage des pixels après les deux rotations d'angles $(2, 1)$ et $(2, -1)$ induit une distance euclidienne de $p_\theta^2 + q_\theta^2 = 5$ entre les pixels 1-voisins dans l'image originale (figure 4.7). Seule la région centrale est représentée ici, l'image entière étant de taille 40×41.

rotation directe dans l'espace Mojette définie à la section 4.3.2, en utilisant le fait que cette rotation est exacte. À titre d'exemple, la figure 4.10 est obtenue par rotation inverse d'angle $(2, -1)$ de l'image de la figure 4.4b. On note que les pixels originalement 1-voisins sont maintenant séparés d'une distance euclidienne $\sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2} \times \sqrt{p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2} = 5$.

Nous pouvons également adopter une autre approche consistant à utiliser non plus un sur-échantillonnage (de l'image et des projections) mais un sous-échantillonnage, comme mentionné dans la section 4.3.1. Ainsi, chaque bin original $b_{p,q}$ est obtenu en divisant $b'_{p',q'}$ par $S_{(p_\vartheta,q_\vartheta)}(p', q')$.

4.3.5 Bilan

Dans cette section, nous avons utilisé des rotations discrètes couplées à un facteur d'échelle dépendant de l'angle discret de rotation. Après avoir défini cette transformation dans l'espace image, nous avons développé son équivalent sur les projections Mojette. Ces transformations sont exactes et réversibles, au prix d'un sur-échantillonnage. Ainsi, l'image comme les projections transformées sont composées d'éléments issus de l'objet initial et d'éléments n'ayant pas d'antécédent par la transformation. Nous avons utilisé une méthode d'interpolation basée sur la géométrie des cellules de VORONOÏ dans l'objet initial et l'objet transformé. Nous pouvons toutefois noter que le masque d'interpolation ainsi déterminé ne modifie pas la valeur de l'image aux pixels contenant de l'information, la transformation reste ainsi réversible. Ces étapes sont récapitulées à la figure 4.11.

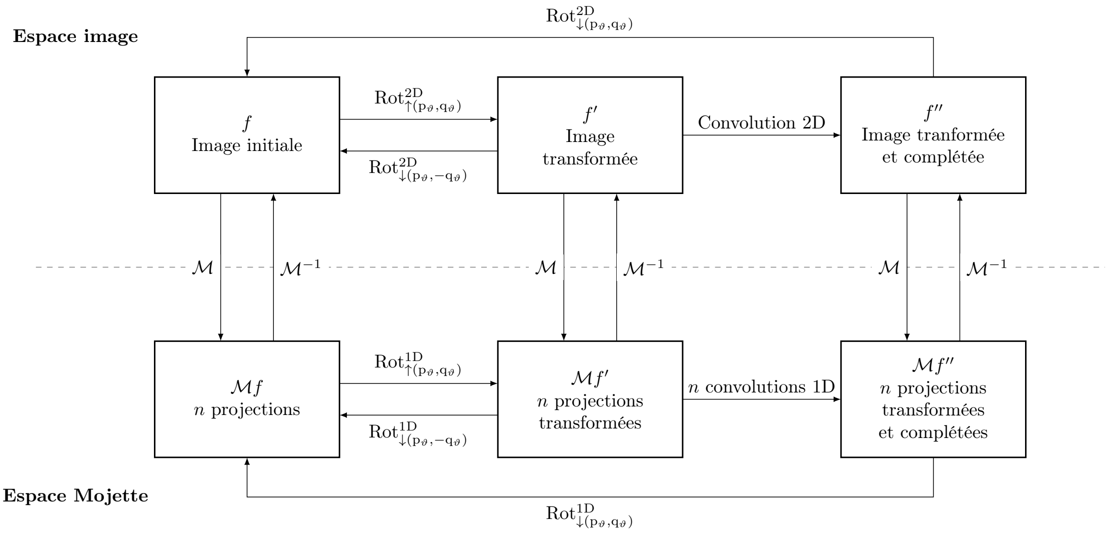


FIGURE 4.11 – Schéma récapitulatif de l'équivalence des rotations discrètes dans l'espace image et dans l'espace Mojette

4.4 Mises à l'échelle dans l'espace Mojette

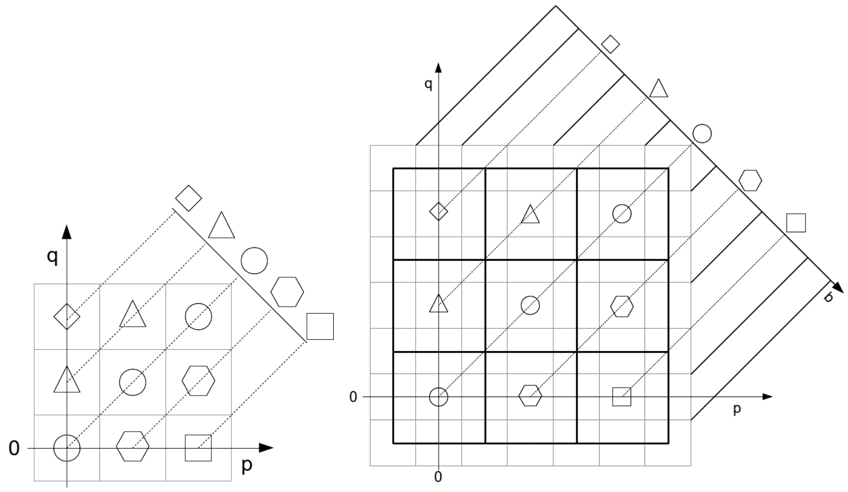
Définissons à présent les mises à l'échelle dans l'espace Mojette. Comme pour les rotations nous nous intéressons à leurs propriétés de transitivité et d'inversibilité.

4.4.1 Mises à l'échelle exactes et réversibles

Une mise à l'échelle d'une image discrète par un facteur entier $s \in \mathbb{N}^*$ consiste à associer chaque pixel (k, l) de l'image originale de taille $W \times H$ à un pixel $(k', l') = (sk, sl)$ d'une nouvelle image de taille $W' \times H'$, où

$$\begin{cases} W = sW + [(s+1) \pmod 2] \\ H = sH + [(s+1) \pmod 2] \, . \end{cases} \tag{4.21}$$

Nous pouvons effectuer cette opération dans l'espace Mojette en associant chaque bin b d'une projection Mojette de direction (p, q) à un bin $b' = s \cdot b$ de la même projection. Les pixels et les bins apparus suite au sur-échantillonnage sont initialisés à une valeur nulle. La figure 4.12 montre un exemple d'agrandissement de facteur deux d'une projection Mojette de direction $(1, 1)$.



(a) (b)

FIGURE 4.12 – (a) Image originale de taille 3×3 et sa projection $(1, 1)$. (b) Mise à l'échelle par un facteur $s = 2$ dans l'espace Mojette. Les carrés en gras correspondent à l'agrandissement de chaque pixel.

Les mises à l'échelle définies précédemment peuvent se combiner : on peut par exemple effectuer successivement un agrandissement de facteur s_1 et un autre de facteur s_2, ce qui correspond à un agrandissement global de facteur $s_3 = s_1 s_2$.

L'opération inverse quant à elle consiste à sous-échantillonner les projections par un facteur s. En particulier, nous pouvons retrouver l'image de départ en effectuant deux agrandissements de facteurs s_1 puis s_2, puis une réduction par un facteur $s_3 = s_1 s_2$.

4.4.2 Homothéties discrètes dans l'espace Mojette

La mise à l'échelle correspond à une homothétie ayant pour centre l'origine de l'image. En effectuant une translation $\mathrm{T}_{(k_\mathrm{c},l_\mathrm{c})}$ (cf. équation (4.5)) avant la mise à l'échelle, le point $(k_\mathrm{c}, l_\mathrm{c})$ définit le centre de l'homothétie. Ainsi une homothétie $\mathrm{H}(s, k_\mathrm{c}, l_\mathrm{c})$ de facteur s et de centre $(k_\mathrm{c}, l_\mathrm{c})$ consiste, dans l'espace Mojette, à associer le bin b d'une projection d'angle (p, q) à un bin b' tel que :

$$b' = s \cdot (b + pl_\mathrm{c} - qk_\mathrm{c})\,. \tag{4.22}$$

En combinant deux transformations réversibles, cette homothétie est encore réversible.

4.4.3 Composition de rotations et de translations

Comme exposé à la section 4.3.4, la rotation dans l'espace Mojette est une transformation exacte avec changement d'échelle. Comme l'image transformée est agrandie d'un facteur $\sqrt{p_\theta^2 + q_\theta^2}$, une rotation suivie de son inverse agit comme une mise à l'échelle. En particulier, toutes les mises à l'échelle d'un facteur s vérifiant le théorème des deux carrés de Fermat, c'est-à-dire pouvant se décomposer sous la forme $s = p_\vartheta^2 + q_\vartheta^2$, peuvent être obtenues par une rotation d'angle $(p_\vartheta, q_\vartheta)$ et son opposé $(p_\vartheta, -q_\vartheta)$.

4.4.4 Complétion des projections Mojette

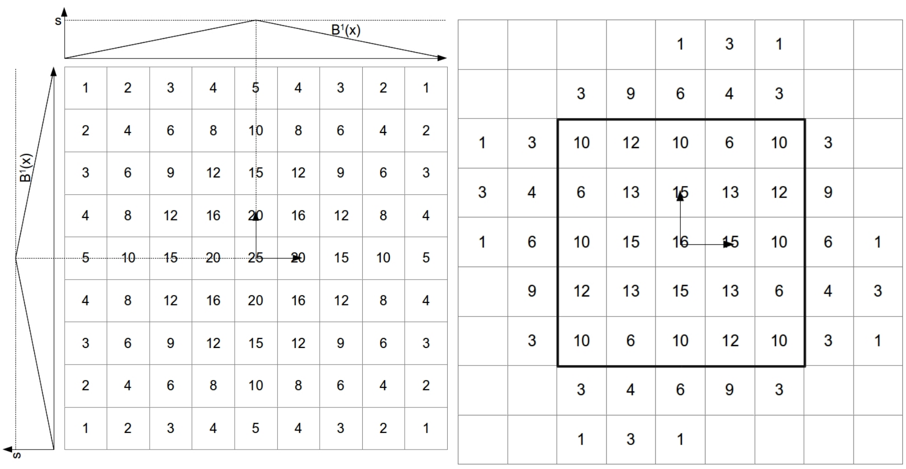
Pour combler les pixels nuls dans une homothétie discrète dans l'espace Mojette, nous pouvons appliquer une rotation, son opposé, et remplir les projections par le filtrage idoine. Cependant, puisqu'on ne peut appliquer ce schéma que lorsque le facteur d'échelle s vérifie le théorème de Fermat, nous proposons ici une méthode plus générale pour remplir les projections pour n'importe quel $s \in \mathbb{N}^*$.

Nous proposons de remplir les pixels indéterminés dans l'image par convolution avec un filtre 2D. Nous choisissons ici d'utiliser des filtres basés sur des fonctions B-Spline de degré n, que l'on note K^n, définis par :

$$K^n(s,k,l) = B_s^n(k) B_s^n(l), \tag{4.23}$$

où B_s^n est le noyau B-Spline discret de degré n et d'échelle s [167, 168] :

$$B_s^0(k) = \begin{cases} 1 \text{ si } |k| < \dfrac{s}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et } B_s^n(k) = B_s^{n-1} \ast B_s^0(k).$$



(a) (b)

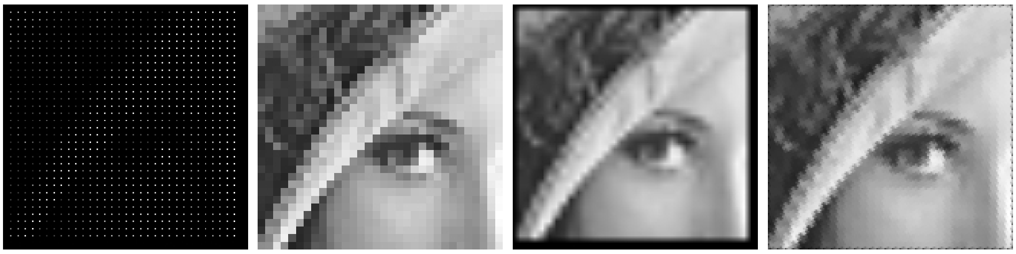
FIGURE 4.13 – Filtres pour un agrandissement de facteur $s = 5$ obtenus par $K^1(s,i,j)$ (a) ou par rotations d'angles $(2,1)$ suivi de $(2,-1)$ (b)

Par exemple, la figure 4.13a montre le masque 2D obtenu par $K^1(s,i,j)$. En comparaison, la figure 4.13b montre un masque 2D obtenu par rotations d'angle $(2,1)$ suivi de $(2,-1)$. Ce dernier masque est dépendant de l'angle de rotation.

Maintenant que nous avons défini un masque 2D, la projection (p',q') peut être complétée par convolution avec la projection d'angle (p',q') de ce masque 2D.

4.4.5 Exemples

Nous présentons à la figure 4.14 quelques exemples de mises à l'échelle à partir des projections Mojette de l'image de la figure 4.5a.



(a) (b) (c) (d)

FIGURE 4.14 – (a) Agrandissement par $s = 5$. (b) Reconstruction obtenue en complétant les projections Mojette avec $K^0(s, i, j)$. (c) Reconstruction obtenue en complétant les projections Mojette avec $K^1(s, i, j)$. (d) Reconstruction obtenue par rotations d'angle $(2, 1)$ et $(2, -1)$

4.5 Discussion

Nous avons développé des translations et des rotations dans l'espace des projections Mojette. Ces opérations sont exactes et il est possible de reconstruire l'image avec l'algorithme Mojette inverse NORMAND en absence de bruit. Dans la section suivante, nous expliquons pourquoi il peut être préférable d'appliquer ces transformations dans l'espace de projection Mojette, au lieu de l'espace image ou de l'espace des projections FRT.

4.5.1 Transformées affines dans l'espace Mojette ou dans l'espace de Radon discret

Une série de rotations successives n'est en général pas exacte dans l'espace de RADON discret, excepté pour les angles de rotations multiples du pas d'échantillonnage angulaire. Il est même déconseillé d'appliquer un tel traitement qui pourrait dégrader les projections de l'image. En pratique, une copie des données originales peut être conservée et la série de rotations revient à effectuer une seule rotation globale.

A contrario, on peut chaîner les rotations dans l'espace Mojette sans perte d'information, même pour les directions discrètes de rotation $(p_\vartheta, q_\vartheta)$ n'appartenant pas à l'ensemble des directions du sinogramme Mojette.

4.5.2 Transformées affines dans l'espace Mojette ou dans l'espace image

Les transformations dans le domaine image et dans le domaine Mojette sont équivalentes, puisque toutes deux reviennent à ré-arranger les pixels. Cependant, le nombre de pixels à traiter dans l'espace image est fixe, alors que dans l'espace Mojette, le nombre de bins à ré-arranger varie selon l'ensemble de projections considéré.

Par contre, l'opération consistant à interpoler les pixels apparus lors du processus de rotation discrète requiert une complexité plus élevée dans le domaine image, puisqu'il faut alors appliquer une convolution 2D sur toute l'image. La complexité de cette opération dépend de la taille du masque et peut être significative pour des paramètres de rotations élevés, comme $(p_\vartheta, q_\vartheta) = (10, 11)$ par exemple, d'autant plus que ce filtre n'est pas séparable. Dans l'espace des projections Mojette, le processus équivalent se réduit à un ensemble d'opérations 1D.

4.5.3 Transformée affines dans l'espace Mojette *versus* espace FRT

La FRT [115] est une autre transformée de Radon discrète, exacte et périodique. Même si les définitions des transformées Mojette et FRT diffèrent, elles restent très proches et partagent certaines propriétés. En particulier, il est possible de passer facilement de la représentation Mojette à la représentation FRT sous quelques conditions [102]. La FRT d'une image de taille $N \times N$ requiert $(N + 1)$ projections pour être inversible de manière exacte.

Cependant, les rotations en FRT ne sont définies que pour des tailles d'images impaires. La mise en œuvre dans l'espace Mojette lève cette restriction.

4.6 Conclusion

Nous avons défini les opérations de translation entière, de rotation et de mise à l'échelle dans l'espace Mojette ainsi que les opérations réciproques. Nous avons montré que ces transformations affines basées sur les projections discrètes de l'image sont exactes et réversibles dans le sens où aucune information n'est perdue dans un processus d'interpolation. Ainsi, l'image reconstruite à partir des projections transformées est exacte si les projections initiales ne contiennent pas de bruit et qu'elles sont suffisantes pour décrire complètement l'image.

Nous avons également défini des homothéties intimement liées aux rotations, car le changement d'échelle peut être vu comme une composition de rotations discrètes. De plus, le centre de l'homothétie peut être sélectionné en effectuant une translation discrète. Cette propriété suggère que l'ensemble des transformations affines dans l'espace Mojette peut être vu comme une composition de transformations de base, définissant ainsi un groupe de similitudes. Un prochain travail va consister à étudier les propriétés de ce groupe.

Du point de vue de l'application, les transformations affines présentées ici trouvent un intérêt pour le traitement d'images tomographiques quantitatives, utilisées par exemple en médecine nucléaire. Ils forment un ensemble cohérent avec les outils de reconstruction tomographique Mojette. Par conséquent, leur utilisation peut être intéressante lorsqu'il est nécessaire à la fois de reconstruire une image et d'effectuer des opérations géométriques (souvent dans un but de recalage sur un atlas) comme c'est le cas en imagerie de perfusion myocardique que nous verrons au chapitre 7.

Une autre perspective est d'utiliser ces transformations pour effectuer du recalage d'acquisition, directement dans l'espace des projections tomographiques.

Aussi, du point de vue plus théorique, une suite à ce travail est d'étendre les résultats de ce chapitre au domaine tridimensionnel. En effet, le cadre bidimensionnel développé ici est adapté à la manipulation de séries en d'images 2D en coupes, séries encore très utilisées dans le domaine médical. Cependant, une ouverture au cas 3D permettrait d'appliquer ces opérations directement aux projections volumiques de plus en plus utilisées dans l'ensemble des dispositifs d'imagerie médicale. La géométrie des projections 3D Mojette est autrement plus complexe qu'en 2D (il suffit pour s'en convaincre de visualiser les grilles de projections 3D dans la section 3.4.5). Ce travail demandera donc un soin particulier.

Enfin, nous nous sommes limités dans ce chapitre aux translations entières ou aux rotations zoomées évitant ainsi le cas où la grille résultante de la transformation ne coïnciderait pas avec la grille initiale. Il existe deux manières d'aborder ces cas problématiques. Premièrement, si nous sommes intéressés par le signal continu sous-jacent, la solution serait d'interpoler aux points de la grille initiale. La difficulté réside dans la nécessité de faire des hypothèses sur la nature et la classe du signal sous-jacent, de choisir une description cohérente des signaux image et projection et de s'assurer du respect de ces garanties lors de la reconstruction Mojette. Une autre solution, dans le cadre de la géométrie discrète, serait de contraindre ces transformations par des garanties topologiques ou structurelles [120, 121, 159]. On peut en particulier s'intéresser au pavage de l'application quasi-affine défini par É. Andres et M.-A. Jacob-Da Col pour étudier ces propriétés [9].

Chapitre 5

Application de la reconstruction tomographique Mojette à partir de données de tomodensitométrie classiques

Dans ce chapitre, nous utilisons la transformée Mojette pour la reconstruction tomographique d'images à partir de projections simulant celles acquises par les dispositifs d'imagerie médicale.

Sommaire

5.1 Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons défini la transformée Mojette comme une transformée de RADON discrète et exacte. En particulier, nous avons commencé par montrer le lien entre la transformée de RADON d'une image discrète et la transformée Mojette, lien établi à l'aide des angles discrets qui permettent de visiter chacun des pixels de la grille discrète de manière uniforme. Dans les chapitres 3 et 4, la transformée Mojette est vue comme un opérateur discret sous l'angle de la géométrie discrète.

Dans ce chapitre, nous utilisons la transformée Mojette comme opérateur discret pour la reconstruction tomographique à partir de projections simulant une acquisition réelle de tomodensitométrie. Ainsi, comme présenté sur la figure 5.1, l'ensemble des traitements réalisés suite à l'acquisition peuvent être réalisées dans l'espace Mojette.

Cette démarche s'effectue en deux temps. Premièrement, les projections simulées sont ré-échantillonnées sur des angles discrets et selon l'échantillonnage variable *intra* projection spécifique à la transformée Mojette. Nous décrivons en particulier deux démarches d'approximation différentes. Dans un second temps, les projections obtenues à l'étape précédente sont reconstruites à partir d'algorithmes de reconstructions adaptés de la tomographie classique, à savoir les algorithmes FBP-Mojette et SART-Mojette, respectivement introduits dans la thèse de doctorat de M. SERVIÈRES [146] et de B. RECUR [135]. Enfin, nous présentons dans une troisième partie les expériences réalisées.

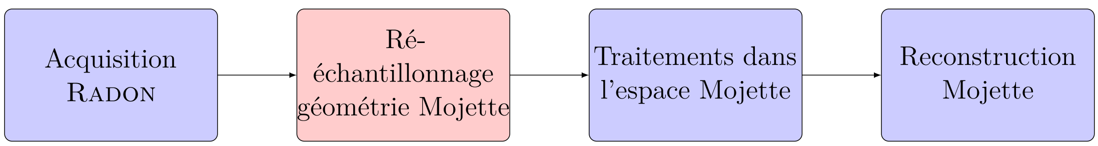


FIGURE 5.1 – Chaîne de traitements, l'acquisition à partir d'une modalité tomographique usuelle à la reconstruction Mojette

5.2 Du sinogramme aux projections Mojette

Dans cette section, nous déployons différentes méthodes pour obtenir des projections Mojette à partir d'un sinogramme traditionnel. La transposition d'un sinogramme traditionnel (que nous appellerons *espace de* RADON) à un sinogramme Mojette (que nous appellerons *espace Mojette*) peut être modélisée de manière générale par un processus double d'approximations.

Premièrement, les projections Mojette sont définies sur des angles discrets, dont la direction peut ne convenir à aucun des angles d'acquisition. Le premier processus d'approximation est donc une approximation dite angulaire, sur la direction de projection. Ce problème a déjà été abordé dans la thèse de M. SERVIÈRES [146].

Deuxièmement, nous avons vu au long de ce manuscrit qu'une spécificité majeure de la transformée Mojette est l'échantillonnage le long d'une projection. En effet, le pas d'échantillonnage dépend de la direction de projection (p, q) et est défini par $\frac{1}{\sqrt{p^2+q^2}}$. Il s'agit alors d'une deuxième étape d'approximation consistant à estimer les valeurs des bins d'une projection Mojette à partir des N_ρ bins d'une projection classique.

5.2.1 Sélection d'un ensemble de directions discrètes

Le moyen le plus simple et naturel vis-à-vis de la géométrie discrète pour obtenir un ensemble d'angles discrets sur $[0, \pi[$ est de considérer une séquence de FAREY-HAROS d'ordre n et ses symétries par rapport à la première bissectrice du plan, puis par rapport à la droite d'équation $x = 0$. Nous noterons cet ensemble $\mathcal{FH}_n$. Cependant, il faut considérer ce choix avec précaution car :

— le nombre d'angles discrets définis par la séquence de FAREY-HAROS d'ordre n est de l'ordre de grandeur de n^2 ;

— le nombre de bins sur une projection (p, q) est proportionnel à $|p| + q$.

Ainsi, choisir une valeur de n élevée permet d'obtenir une précision importante sur l'approximation angulaire de $\tan\theta$ par $\frac{q}{p}$, mais nécessite d'estimer un grand nombre de bins, ce qui peut réduire la précision de l'approximation sur les projections. Il s'agit alors de trouver un compromis acceptable entre l'erreur d'approximation angulaire, l'erreur d'approximation des bins sur chaque projection, et le surcoût engendré par l'augmentation du nombre de bins à traiter.

5.2.1.1 Première méthode : Utilisation d'une séquence de Farey-Haros complète avec interpolation angulaire (ANG)

La première méthode proposée consiste à générer autant de projections Mojette que de projections discrètes contenues dans une séquence de Farey-Haros d'ordre n et ses symétriques.

Nous choisissons le rang n de la séquence de Farey-Haros de façon à ce que l'ensemble de directions discrètes $\mathcal{FH}_n$ soit le plus petit possible, tout en contenant au moins autant d'angles que le sinogramme initial, autrement dit :

$$n = \min \{ m \mid \mathrm{Card}(\mathcal{FH}_m) \geq N_\theta \} .$$

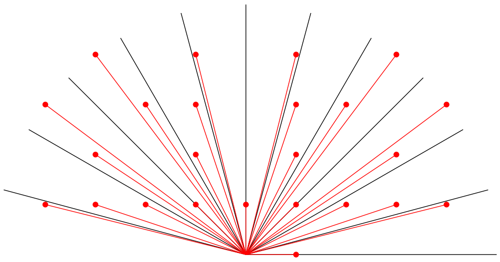
Pour chaque direction discrète $(p, q) \in \mathcal{FH}_n$, une nouvelle projection d'angle $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)$ est générée en interpolant entre les lignes du sinogramme par rapport à l'écart angulaire.

Dit autrement, la méthode ANG consiste à construire l'ensemble des projections Mojette de la séquence de Farey-Haros d'ordre n fixé et à les compléter à partir d'une interpolation à la fois sur l'angle et les bins des projections acquises.

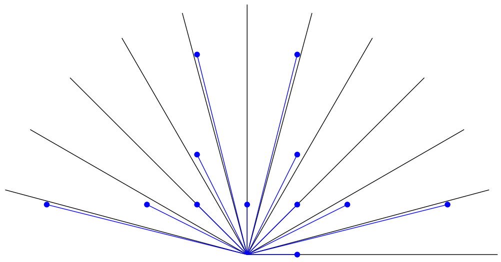
5.2.1.2 Deuxième méthode : Sélection d'un ensemble d'angles discrets les plus proches des directions initiales (PP)

Nous proposons également une deuxième méthode de ré-échantillonnage des projections usuelles en géométrie Mojette, qui consiste à ne sélectionner dans $\mathcal{FH}_n$ qu'un sous-ensemble d'angles discrets les plus proches des directions initiales. Ainsi, nous faisons correspondre à chaque angle θ l'angle discret (p, q) le plus proche. Cette approche est conçue dans le but de minimiser la distorsion angulaire que produit l'interpolation entre deux angles.

D'autre part, utilisant cette méthode, nous obtenons le même nombre de projections discrètes que de projections initiales. Les directions de projections sont également réparties de manière plus uniforme sur le demi-cercle $[0, \pi[$ par rapport à la méthode précédente, comme nous pouvons le voir dans la figure 5.2.



(a) Méthode ANG



(b) Méthode PP

FIGURE 5.2 – Illustration des deux méthodes de ré-échantillonnage proposées. Ici, $N_\theta = 12$ et on utilise $\mathcal{FH}_4$.

5.2.2 Interpolation sur les projections

Après avoir déterminé l'ensemble de projections discrètes à interpoler à partir du sinogramme, nous utilisons une nouvelle fois une base d'interpolation B-Spline cardinale pour ré-échantillonner chaque nouvelle projection. Ces fonctions sont reconnues pour leurs propriétés quasi-optimales d'interpolation et d'approximation par rapport à la taille du support [158]. Cette étape correspond, dans le cas PP, à une interpolation unidimensionnelle sur chaque ligne du sinogramme.

5.3 Des projections Mojette à la reconstruction

Jusqu'ici, nous avons décrit deux algorithmes de reconstruction à partir de données Mojette : la reconstruction itérative locale (section 2.5.3 page 93) et la rétroprojection complète exacte (section 3.5.1 page 136). Les méthodes que nous allons utiliser ici sont issues de la discrétisation, en géométrie Mojette, de méthodes classiques de reconstruction tomographique. Elles sont basées sur la classe de transformées Mojette-Spline décrites dans l'annexe A.

5.3.1 FBP-Mojette

L'algorithme de rétroprojection filtrée que nous utilisons dans ce chapitre est celui décrit par M. SERVIÈRES dans sa thèse de doctorat [146]. Cet algorithme a été adapté de la FBP classique pour la géométrie de la transformée Mojette en se basant sur les travaux de J. GUÉDON et Y. BIZAIS [74].

Comme pour la FBP classique, chaque projection Mojette-Spline de degré n est convoluée par un filtre rampe K. Dans l'annexe A, nous montrons que la rétroprojection Mojette-Spline de degré n peut-être décomposée en une étape de filtrage de la projection Mojette-Spline et d'un noyau de convolution $S^n_{(p,q)}$ suivie d'une étape de rétroprojection Mojette-DIRAC. Nous séparons ces deux étapes dans l'algorithme de reconstruction :

$$\mathcal{M}^*_{n(p,q)}\left(\mathcal{M}_{n(p,q)}f \underline{*} K\right) = \mathcal{M}^*_{\delta(p,q)}\left(S^n_{(p,q)} \underline{*} \left(\mathcal{M}_{n(p,q)}f \underline{*} K\right)\right) \tag{5.1}$$

$$= \mathcal{M}^*_{\delta(p,q)}\left(\underbrace{\left(S^n_{(p,q)} \underline{*} K\right)}_{K^n_{(p,q)}} \underline{*} \mathcal{M}_{n(p,q)}f\right). \tag{5.2}$$

Lors de la mise en œuvre de l'algorithme FBP-Mojette sur un modèle B-Spline de degré n, nous regroupons les étapes de filtrage par le trapèze discret dans le filtre rampe. Le filtre ainsi déterminé est noté $K^n_{(p,q)}$.

Dans ce chapitre, nous adoptons le modèle de pixel B-Spline de degré zéro. Plus particulièrement, l'expression de ce filtre $K^0_{(p,q)}$ est donné par [146] :

$$K^0_{(p,q)}(b) = \begin{cases} -\frac{2}{\pi(4b^2-1)} & \text{si } p = 0 \text{ ou } q = 0 \\ \frac{p^2+q^2}{\pi pq} \ln\left|\frac{b^2-\left(\frac{p+q}{2}\right)^2}{b^2-\left(\frac{p-q}{2}\right)^2}\right| & \text{sinon pour } |b| = \left|\frac{p\pm q}{2}\right|. \end{cases} \tag{5.3}$$

Dans le second cas, il existe deux points de discontinuité lorsque $|b| = \left|\frac{p+q}{2}\right|$ et $|b| = \left|\frac{p-q}{2}\right|$. Nous utilisons alors l'expression du filtre régularisé de J. GUÉDON et Y. BIZAIS [74, équation (28)].

5.3.2 SART-Mojette

L'algorithme SART repose sur l'expression de la matrice de projection $\mathbf{M}$ et de rétroprojection $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}^\top$. Pour un modèle de pixel DIRAC, nous avons détaillé le calcul de la matrice de projection à la section 2.5.6 page 101. Pour obtenir la matrice de projection Mojette-Spline, nous remarquons que l'opération de filtrage sur les projections correspond au filtrage des colonnes de la matrice. En effet, nous avons pour chaque projection (p, q) :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_\delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{p_\delta} \\ \boldsymbol{p_n} = \boldsymbol{p_\delta} \underline{*} S^n_{(p,q)} \end{cases} \Leftrightarrow \forall i, \begin{cases} p_{\delta i} = \sum_j M_{\delta i,j} f_j \\ p_{n i} = \sum_k p_{\delta k} S^n_{(p,q)}(i-k) \end{cases} \tag{5.4}$$

$$\Leftrightarrow \forall i,\ p_{n i} = \sum_k \left(\sum_j M_{\delta k,j} f_j \right) S^n_{(p,q)}(i-k) \tag{5.5}$$

$$\Leftrightarrow \forall i,\ p_{n i} = \sum_j \underbrace{\left(\sum_k M_{\delta k,j} S^n_{(p,q)}(i-k) \right)}_{M_{0 i,j}} S^n_{(p,q)}(i-k). \tag{5.6}$$

Donc $\mathbf{M_0}$ est obtenu en convoluant les colonnes de $\mathbf{M}_\delta$ par $S^n_{(p,q)}$.

Sans perte de généralité, nous pouvons considérer que la matrice de projection est constituée de blocs de lignes contigus pour chaque direction de projection, par exemple :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{(p_1,q_1)} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline \mathbf{M}_{(p_N,q_N)} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Pour chaque bloc distinct $\mathbf{M}_{(p_i,q_i)}$, il suffit donc de convoluer chacune des colonnes par $S^n_{(p_i,q_i)}$.

5.4 Expérimentations

Les expériences que nous présentons ici sont basées sur des sinogrammes obtenus par simulation analytique d'une acquisition de tomodensitométrie du fantôme de analytique de L. A. Shepp et B. F. Logan [149]. Les données sont donc quasi-exactes et non-bruitées.

5.4.1 Protocole expérimental

Les projections sont simulées en suivant une distribution angulaire uniforme sur l'intervalle $[0, 180°[$. Nous fixons la taille de l'image à reconstruire à 256×256 pixels. Chaque projection est également composée de 256 bins. Le nombre de projections total, noté N_θ, est variable.

Les sinogrammes acquis sont ensuite ré-échantillonnés en géométrie Mojette en utilisant les deux méthodes décrites à la section 5.2. Les sinogrammes simulés sont reconstruits par méthode analytique FBP [97] (filtre de Ram-Lak) et méthode itérative SART [7]. Les sinogrammes ré-échantillonnés sont reconstruits en utilisant les algorithmes FBP-Mojette K^0 et SART-Mojette décrits dans la section précédente. Nous utilisons quatre itérations pour SART, à la fois dans le cas de référence et dans le cas d'utilisation de la transformée Mojette.

Afin de comparer les images discrètes reconstruites au modèle analytique de Shepp-Logan, nous générons une version discrète de ce fantôme comportant 256×256 pixels, en utilisant la fonction B-Spline de degré 0 comme fonction d'échantillonnage. Celui-ci correspond au pré-filtre idéal $\mathring{\beta}^0$ pour un modèle *continu-discret* B-Spline de degré 0 (cf. annexe B). Dans toutes nos expériences, nous utiliserons ce même modèle de pixel β^0, autrement dit un pixel uniforme. Ce choix implique que la transformée de Radon, ainsi que le signal continu sous-jacent à la transformée Mojette-Spline 0 (cf. annexe B), appartiennent à l'espace invariant par translation engendré par les fonctions B-Spline de degré 1. Autrement dit, nous devons utiliser une interpolation linéaire sur les projections.

L'ensemble du processus est schématisé à la figure 5.3.

5.4.1.1 Modèles de projection et de rétroprojection de référence

Pour les reconstructions FBP et SART classiques, les opérateurs de projection et de rétroprojection peuvent être modélisés de plusieurs manière afin de décrire la relation entre l'acquisition continue et sa discrétisation.

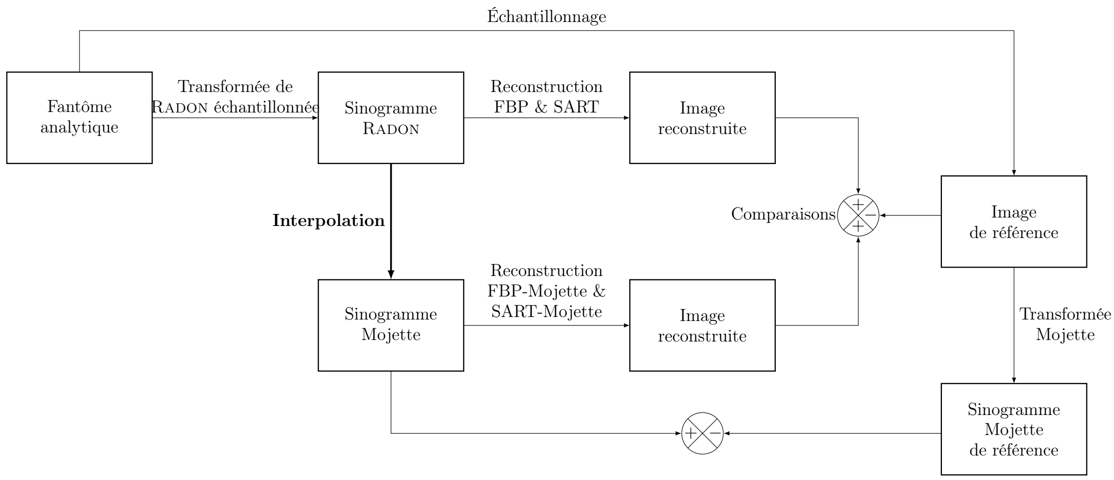


FIGURE 5.3 – Schéma global de l'expérience

Nous avons utilisé les trois modèles suivants :

Modèle dicté par le pixel Pour obtenir la valeur à rétroprojeter dans un pixel, nous calculons d'abord la coordonnée ρ sur laquelle se projète le centre du pixel considéré. Une interpolation est ensuite réalisée sur les bins de la projection pour déterminer la valeur de se nouveau bin à la coordonnée ρ. La valeur obtenue est ensuite rétroprojetée dans un pixel.

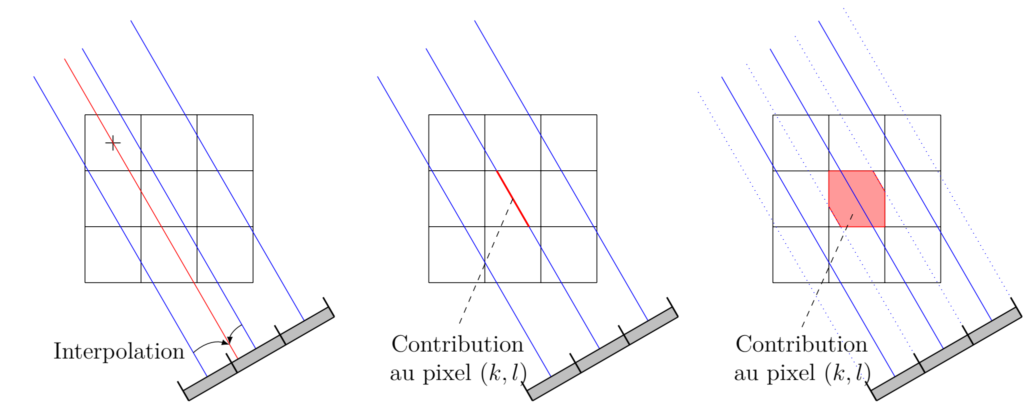
Modèle de rayon infiniment fin La contribution d'un pixel à un bin, et par symétrie la contribution d'un bin à un pixel, est déterminée par la longueur que traverse un rayon centré sur le bin à l'intérieur d'un pixel.

Modèle de droite épaisse La contribution d'un pixel à un bin, et par symétrie la contribution d'un bin à un pixel, est déterminée par la surface de recouvrement entre un faisceau de largeur $\Delta\rho$ et un pixel.

Ces modèles sont illustrés par la figure 5.4.

5.4.1.2 Évaluation des performances

L'évaluation des performances est réalisée sur l'image reconstruite. Nous utilisons pour métrique objective de qualité l'erreur quadratique moyenne (MSE) pour comparer deux signaux discrets (images ou projections) ainsi que le rapport signal



(a) Modèle dicté par le pixel (b) Modèle de rayon infiniment fin (c) Modèle de droite épaisse

FIGURE 5.4 – Modèles de projection/rétroprojection de référence

sur bruit (PSNR). Pour deux images f et f' de taille $W \times H$, ceux-ci sont définis par :

$$\begin{aligned}
\mathrm{MSE}(f,f') &= \frac{1}{WH}\sum_{k=0}^{W-1}\sum_{l=0}^{H-1}\left(f(k,l)-f'(k,l)\right)^2\\
\mathrm{PSNR}(f,f') &= 10\log_{10}\left(\frac{\max(f)^2}{\mathrm{MSE}(f,f')}\right).
\end{aligned}$$

5.4.2 Résultats obtenus pour les méthodes de reconstruction de référence

Nous présentons dans cette section les résultats de reconstruction, ainsi que les métriques de qualité, obtenus à partir des reconstructions FBP et SART des sinogrammes simulés, sans ré-échantillonnage. Ces mesures serviront de référence à confronter aux reconstructions basées sur la transformée Mojette.

5.4.2.1 Reconstructions de référence pour la FBP

Nous nous intéressons à présent aux reconstructions FBP avec les trois modèles de référence en faisant varier le nombre de projections acquis N_θ, obtenus directement à partir des sinogrammes simulés. L'erreur quadratique moyenne mesurée entre l'image de référence et les reconstructions obtenus est reportée dans le tableau 5.5. Le score de rapport signal sur bruit correspondant est tracé sur la figure 5.6.

N_θ	30	70	110	150	190	230	270	310
Modèle dicté par le pixel	2,440	1,148	1,047	1,019	1,010	1,007	1,007	1,005
Modèle de rayon fin	1,832	0,300	0,141	0,091	0,065	0,055	0,049	0,048
Modèle de droite épaisse	1,456	0,173	0,074	0,051	0,043	0,041	0,041	0,041

Tableau 5.5 – MSE (arrondie à la 3e décimale) obtenue pour les reconstructions de référence FBP en fonction du modèle de rétroprojection et du nombre de projections

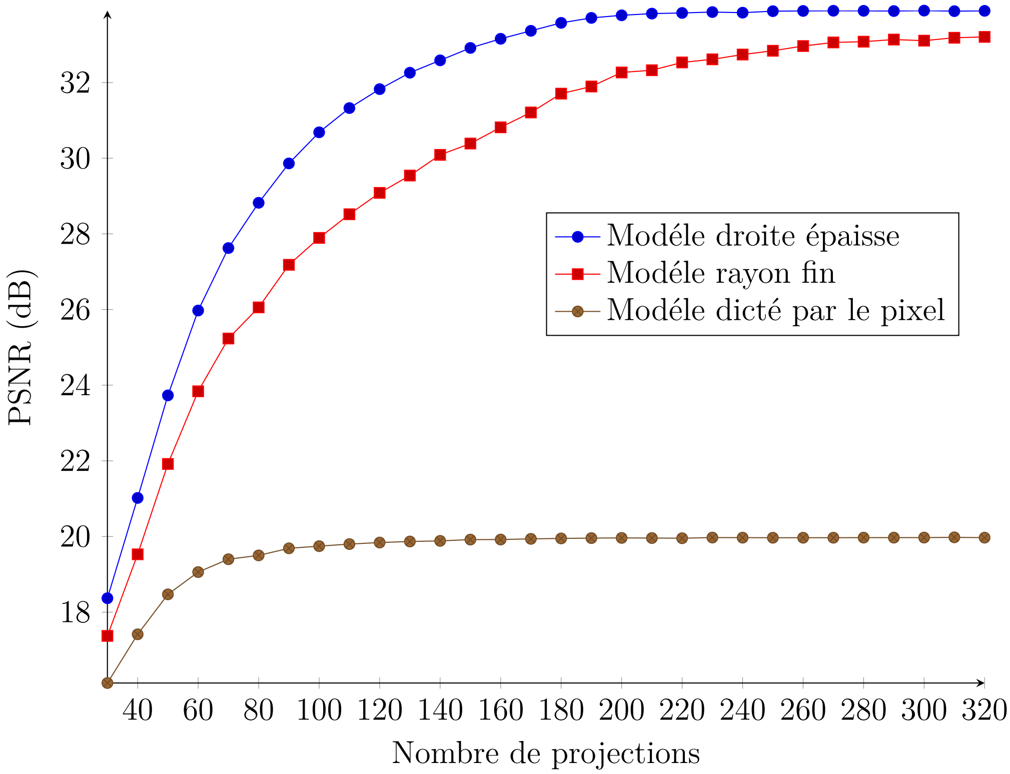


FIGURE 5.6 – PSNR pour les reconstructions de référence FBP en fonction du nombre de projections

Ces résultats montrent que le choix d'un modèle de discrétisation de la transformée de RADON influence la qualité de la reconstruction de manière significative. De plus, ces observations confirment l'intuition et le fait, bien connu dans la littérature, que le modèle de projection/rétroprojection utilisant une droite épaisse est supérieur aux deux autres.

Les images de reconstruction correspondant à ces résultats quantitatifs sont présentés dans le figure 5.9

5.4.2.2 Reconstructions de référence pour SART

Nous nous intéressons à présent aux reconstructions obtenues avec l'algorithme itératif SART au bout de quatre itérations. L'erreur quadratique moyenne mesurée entre l'image de référence et les reconstructions obtenus est reportée dans le tableau 5.7. Le score de rapport signal sur bruit correspondant est tracé sur la figure 5.8.

N_θ	30	70	110	150	190	230	270	310
Modèle dicté par le pixel	1,261	1,116	1,226	1,287	1,327	1,352	1,381	1,391
Modèle de rayon fin	0,754	0,186	0,101	0,080	0,068	0,065	0,064	0,065
Modèle de droite épaisse	0,728	0,154	0,074	0,057	0,051	0,055	0,061	0,065

Tableau 5.7 – MSE (arrondie à la 3^{e} décimale) obtenue pour les reconstructions de référence SART en fonction du modèle de projection/rétroprojection et du nombre de projections

Nous voyons que globalement, les tendances sont les mêmes que pour les reconstructions FBP et le modèle de droite épaisse surpasse les autres. De plus, le modèle de projection et de rétroprojection dicté par le pixel donne des résultats de qualité bien inférieure aux deux autres modèles. Ce modèle sera donc abandonné dans la suite afin d'obtenir des comparaisons les plus objectives possibles avec les méthodes de reconstruction basées sur la transformée Mojette.

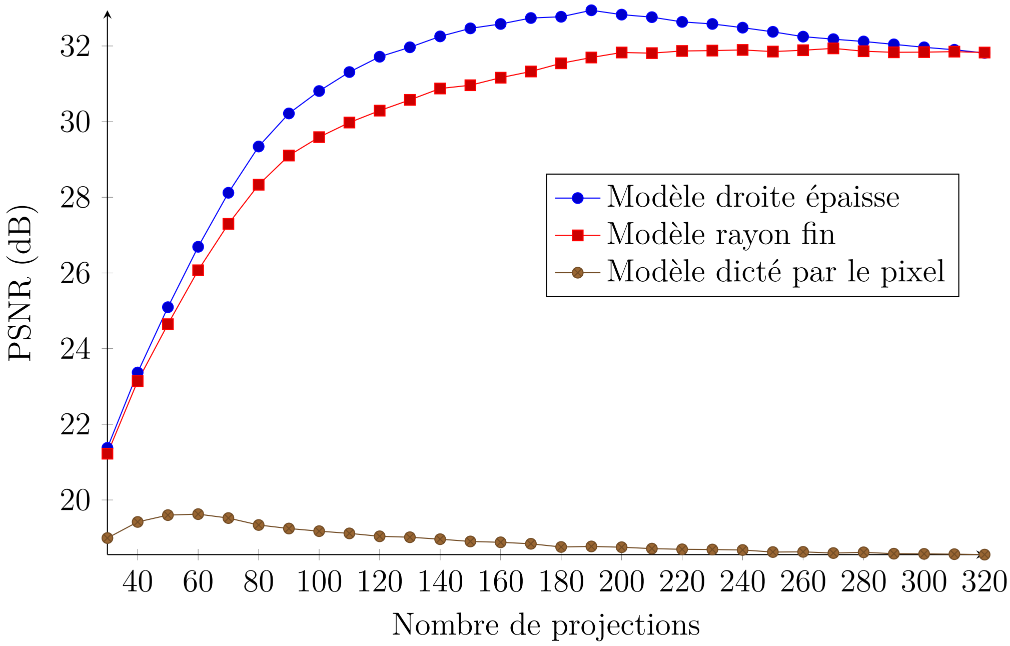


FIGURE 5.8 – PSNR pour les reconstructions de référence SART en fonction du nombre de projections

Nous notons tout de même un comportement contre-intuitif de l'erreur et du rapport signal sur bruit sur le tableau 5.7 et la figure 5.8. En effet, l'erreur augmente au delà de 180 projections, alors qu'elle continue à diminuer pour la FBP même si on peut observer un plateau. Il peut y avoir plusieurs raisons à cela. D'une part, les sinogrammes sont simulés avec une précision finie, ce qui peut engendrer de faibles incohérences entre les projections obtenues. Ce léger bruit de mesures et de quantification peut affecter la convergence de SART. D'autre part, le nombre d'itérations est le même pour toutes expériences. Il se peut alors qu'en augmentant le nombre de projections, on voit apparaître des phénomènes de sur- ou de sous-ajustement, qui peuvent être corrigés en modifiant le nombre d'itérations. Enfin, nous pourrions également nous interroger sur le rôle même de la figure de mérite utilisée, qui sont des mesures globales et objectives sur l'image. En effet, même si le PSNR diminue, l'examen visuel des images obtenues dans le figure 5.10 ne semble pas indiquer de baisse de qualité lorsque le nombre de projections disponible augmente.

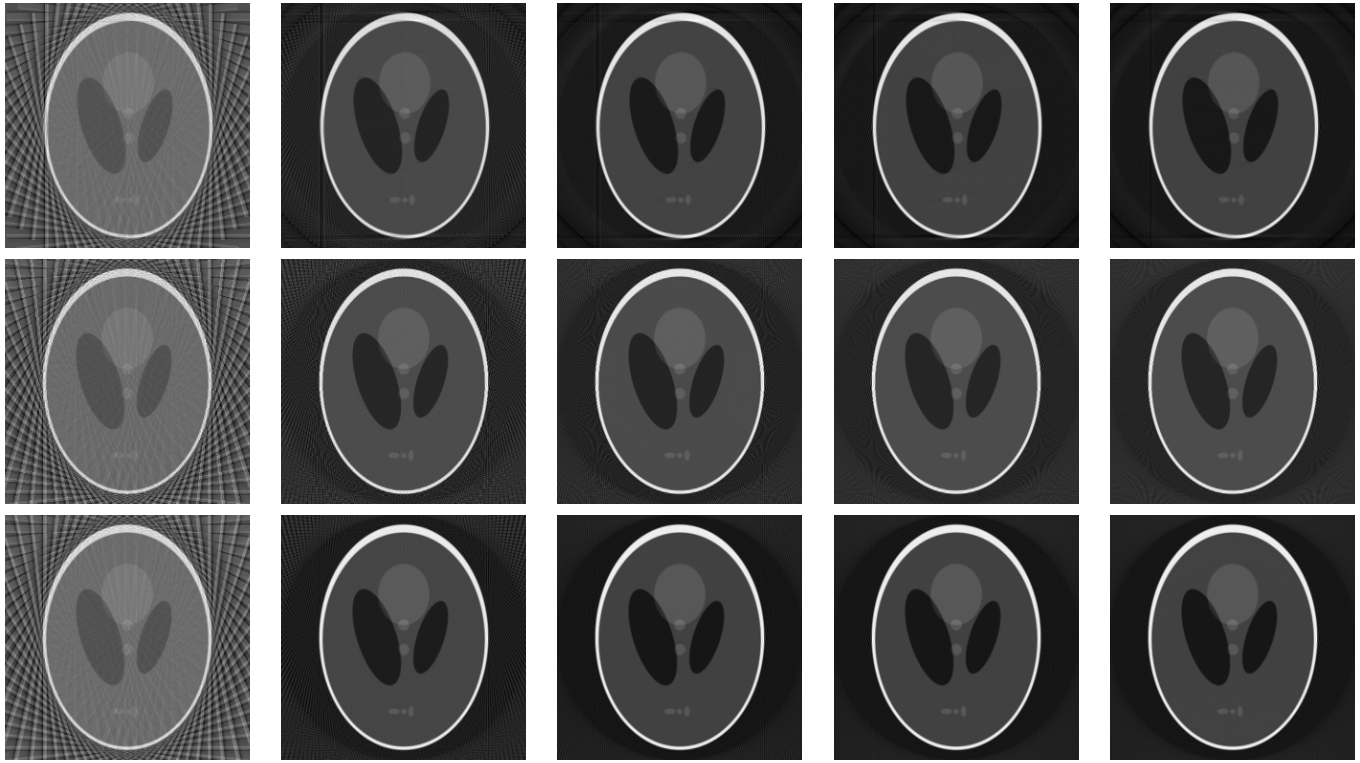


FIGURE 5.9 – Images de reconstructions FBP de référence

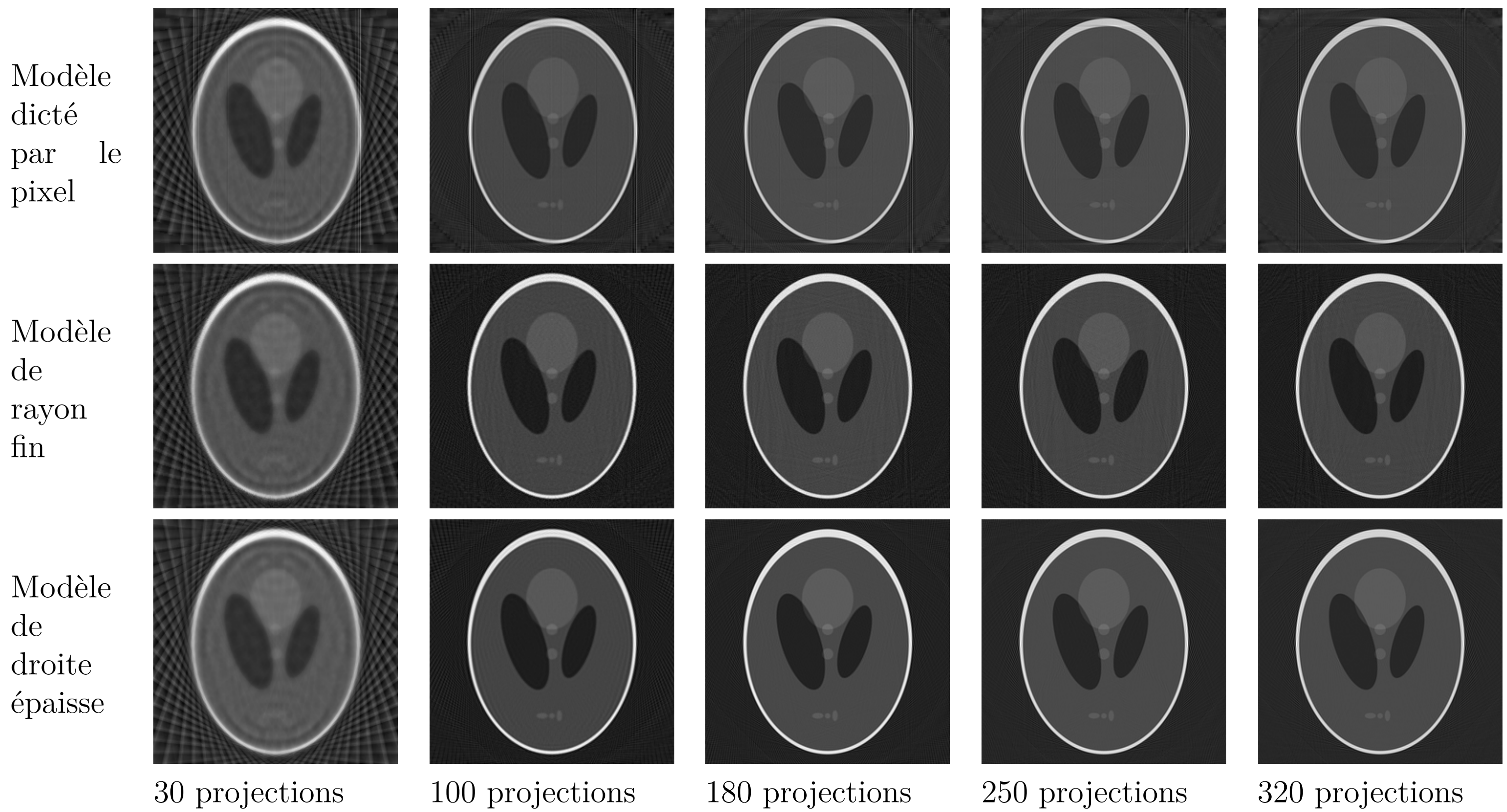


Figure 5.10 – Images de reconstructions SART de référence

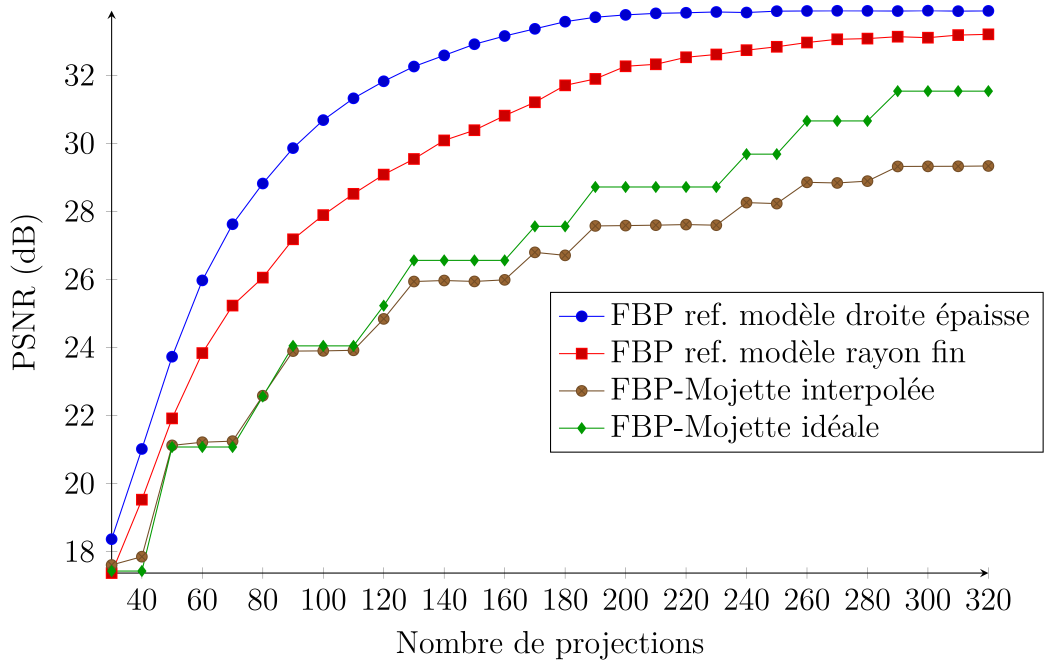
5.4.3 Résultats obtenus en utilisant la première méthode d'interpolation angulaire (ANG)

Dans cette section, nous nous intéressons à la sensibilité de la reconstruction issue de données interpolées avec la méthode ANG en fonction du nombre de projections initiales N_θ. La séquence de Farey-Haros et ses symétriques $\mathcal{FH}_n$ est choisie tel que l'ensemble des angles discrets soit le plus petit possible mais en nombre au moins égal à N_θ. La MSE des reconstructions Mojette à partir du sinogramme interpolé est reportée dans le tableau 5.11. La figure 5.12 permet de comparer le PSNR obtenu pour les reconstructions Mojette et pour les reconstructions avec les méthodes de référence.

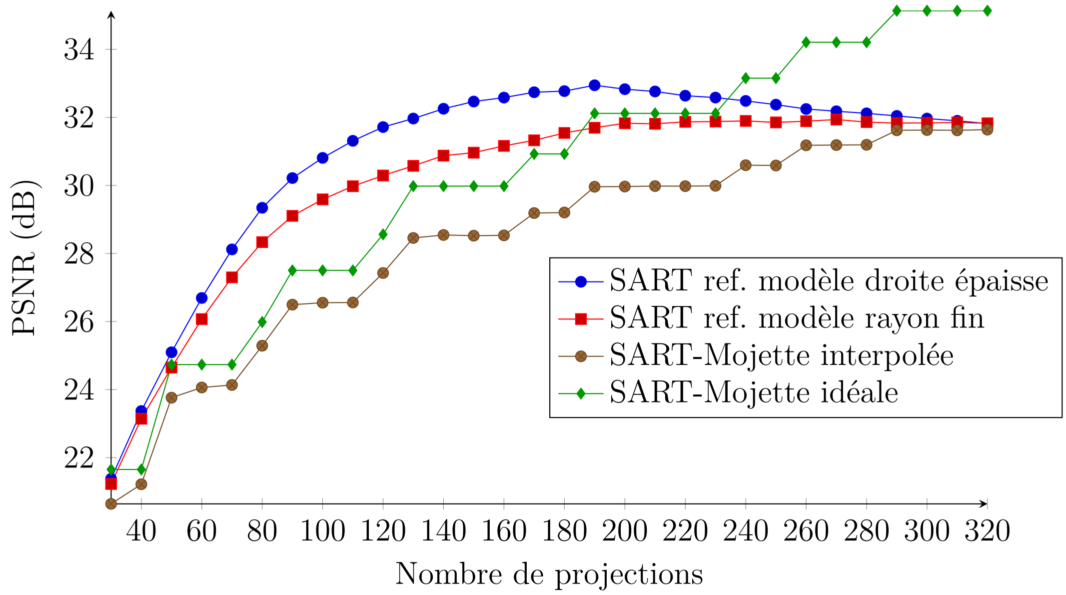
N_θ	30	70	110	150	190	230	270	310
$\mathcal{FH}_n$	5	7	9	11	13	13	15	16
Nombre de projections	40	72	112	168	232	232	288	320
FBP								
Radon droite épaisse	1,456	0,173	0,074	0,051	0,043	0,041	0,041	0,041
Mojette idéale	1,807	0,780	0,394	0,221	0,134	0,134	0,086	0,070
Mojette interpolée	1,734	0,750	0,406	0,254	0,175	0,174	0,131	0,117
SART								
Radon droite épaisse	0,728	0,154	0,074	0,057	0,051	0,055	0,061	0,065
Mojette idéale	0,684	0,336	0,178	0,100	0,061	0,061	0,038	0,031
Mojette interpolée	0,863	0,386	0,221	0,141	0,101	0,100	0,076	0,069

Tableau 5.11 – MSE (arrondie à la 3^{e} décimale) mesurée entre les reconstructions Mojette et l'image de référence pour la méthode de ré-échantillonnage ANG

Dans le tableau 5.11, les lignes *Radon droite épaisse* rappellent, à titre de comparaison, les résultats obtenus avec les méthodes de référence en utilisant un modèle de droite épaisse (dernière ligne des tableaux 5.5 et 5.7). Les lignes *FBP-Mojette idéale* et *SART-Mojette idéale* correspondent aux reconstructions Mojette obtenues avec un sinogramme Mojette idéal, en calculant la transformée Mojette directement à partir de l'image de référence. Ces lignes donnent une



(a) FBP-Mojette



(b) SART-Mojette

FIGURE 5.12 – PSNR pour les reconstructions FBP-Mojette (a) et SART-Mojette (b) à partir de sinogrammes interpolés avec la première méthode ANG et à partir des sinogrammes Mojette idéaux

borne supérieure (ou inférieure si l'on parle de MSE) de la qualité objective de la reconstruction que l'on pourrait obtenir.

D'une manière globale, nous pouvons voir dans la figure 5.12 que les reconstructions Mojette à partir d'un sinogramme Mojette interpolé et à partir d'un sinogramme Mojette idéal suivent les mêmes tendances pour FBP et SART. Les différences observées permettent de quantifier la perte d'information due au rééchantillonnage et à la différence de modèle de projection entre la transformée Mojette et la transformée de Radon continue.

Pour les reconstructions itératives SART-Mojette (figure 5.12b), le rapport signal sur bruit atteint le plateau observé pour les reconstructions SART de référence à partir du sinogramme simulé initial. Par contre, la reconstruction SART-Mojette à partir d'un sinogramme Mojette idéal surpasse les méthodes de référence dès que l'on utilise une séquence de Farey-Haros d'ordre supérieur à 13.

En ce qui concerne les reconstructions FBP-Mojette (figure 5.12a), les résultats sont globalement en-dessous de ceux obtenus par les méthodes de référence, et ce même pour les reconstructions FBP-Mojette à partir d'un sinogramme idéal. Cette observation nous pousse à penser qu'au delà du problème de ré-échantillonnage, l'utilisation d'une séquence de Farey-Haros complète est incompatible avec l'algorithme de reconstruction FBP.

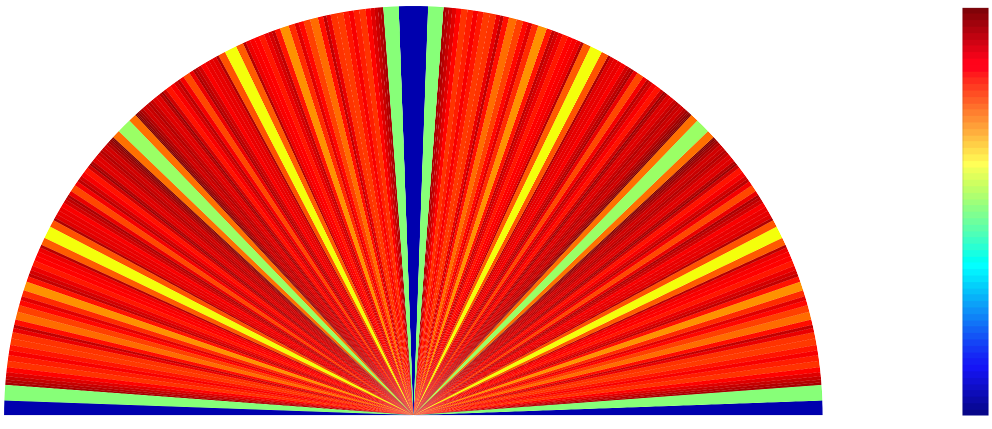


Figure 5.13 – Écart angulaire entre chaque direction discrète de projection dans l'ensemble $\mathcal{FH}_{14}$

En effet, l'algorithme de rétroprojection filtrée est basé sur une symétrie angulaire des directions de projections considérés pour pouvoir appliquer un filtre sur chaque projection de manière indépendante les unes des autres. Or, comme nous pouvons le voir sur la figure 5.13 représentant l'écart angulaire entre chaque direction discrète de projection dans la séquence de Farey-Haros, la répartition de ces angles discrets est très hétérogène.

Cette hypothèse peut être vérifiée en modifiant l'ensemble de directions discrètes considérées, afin d'obtenir un ensemble de directions discrètes équi-réparties de manière angulaire. C'est l'objet de la deuxième méthode de ré-échantillonnage que nous présentons dans la prochaine section.

	30 projections, $\mathcal{FH}_5$	100 projections, $\mathcal{FH}_9$	180 projections, $\mathcal{FH}_{12}$	250 projections, $\mathcal{FH}_{14}$	320 projections, $\mathcal{FH}_{16}$
FBP-Mojette à partir du sinogramme interpolé					
FBP-Mojette à partir du sinogramme idéal					
FBP de référence droite épaisse					

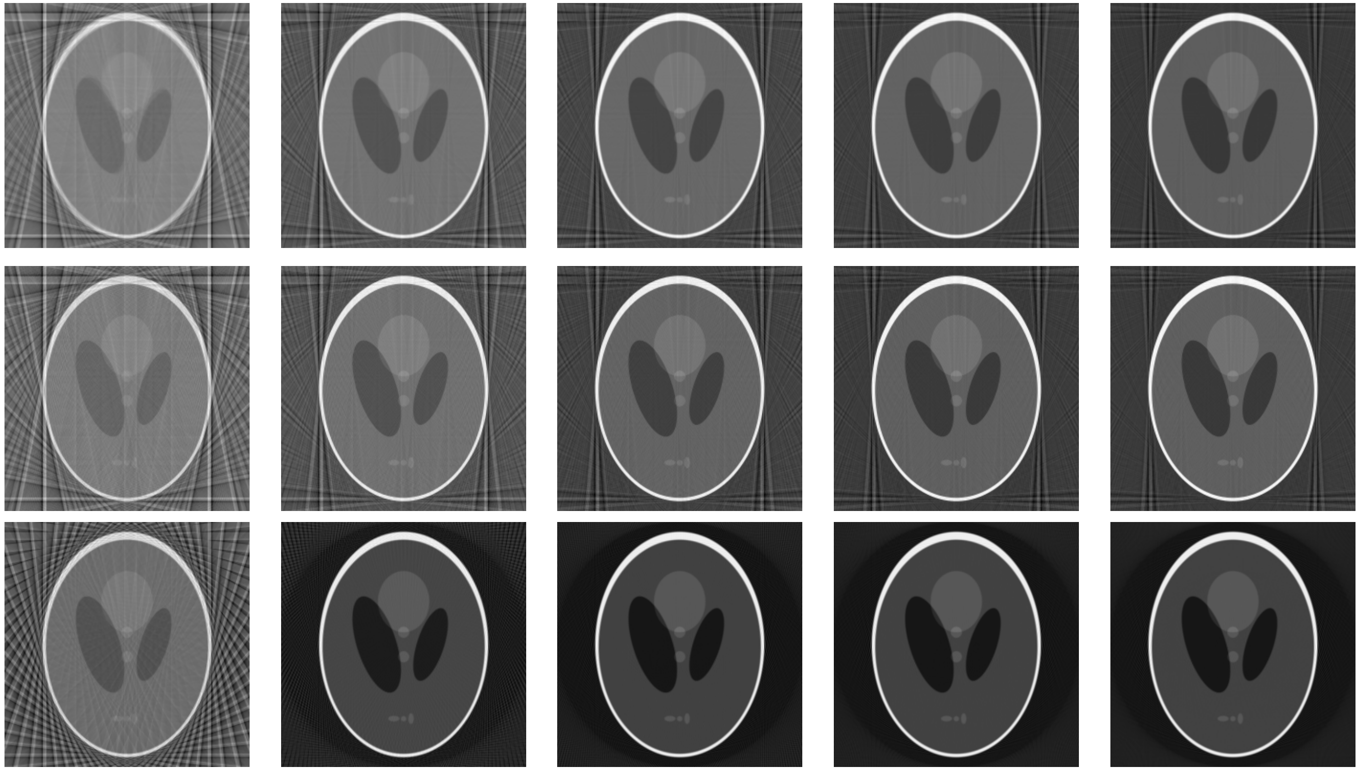
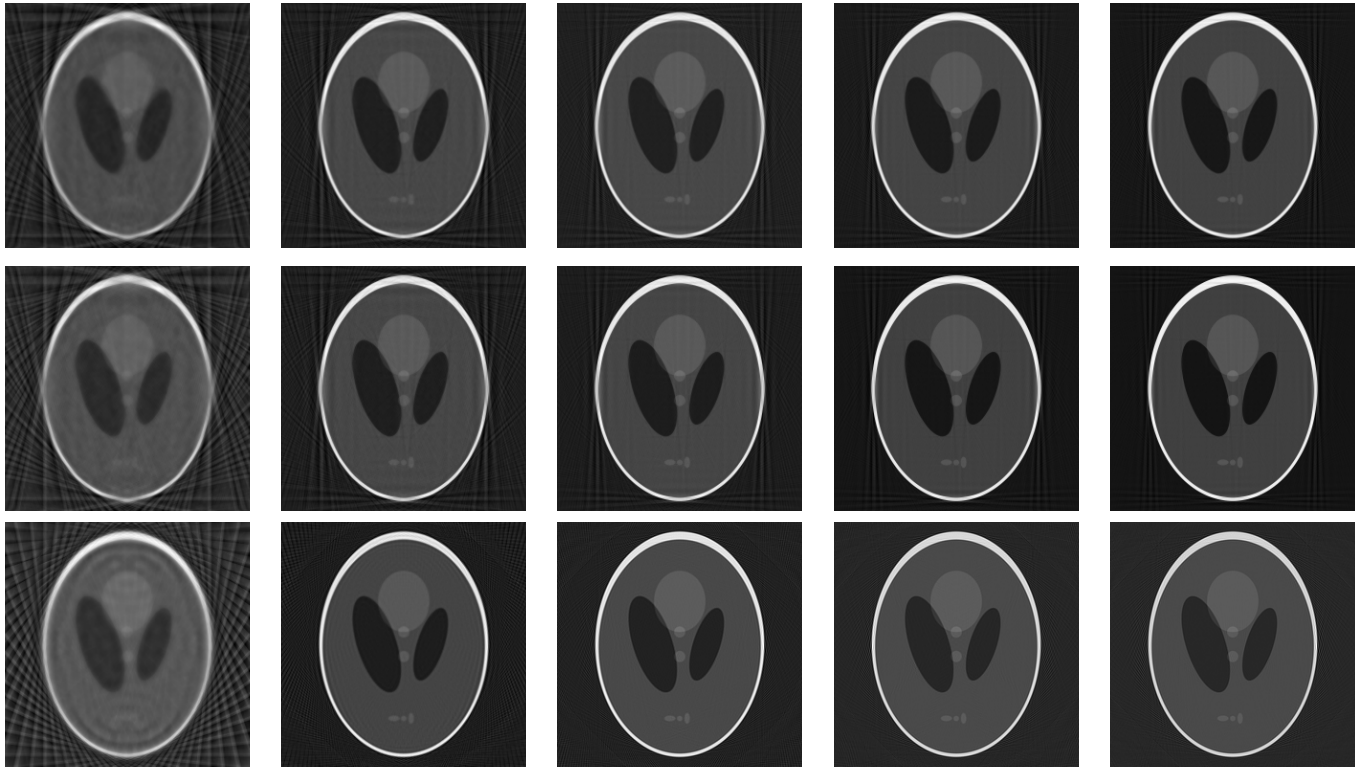


Figure 5.14 – Images de reconstructions FBP-Mojette à partir de sinogrammes interpolés avec la méthode de ré-échantillonnage ANG

SART-Mojette à partir du sinogramme interpolé

SART-Mojette à partir du sinogramme idéal

SART de référence droite épaisse



30 projections, $\mathcal{FH}_5$ | 100 projections, $\mathcal{FH}_9$ | 180 projections, $\mathcal{FH}_{12}$ | 250 projections, $\mathcal{FH}_{14}$ | 320 projections, $\mathcal{FH}_{16}$

FIGURE 5.15 – Images de reconstructions SART-Mojette à partir de sinogrammes interpolés avec la méthode de ré-échantillonnage ANG

5.4.4 Résultats obtenus en utilisant la deuxième méthode de ré-échantillonnage avec sélection d'angles discrets (PP)

Le but de cette section est d'analyser les performances de la méthode de ré-échantillonnage en sélectionnant un sous-ensemble d'angle discrets parmi une séquence de Farey-Haros et ses symétriques les plus proches des directions de projections initiales. Nous analysons l'influence du nombre de projections initialement acquises N_θ ainsi que de l'ordre de la séquence de Farey-Haros considérée.

Ainsi, nous nous intéressons à la sensibilité de la reconstruction issue de données interpolées avec la méthode PP en fonction du nombre de projections initiales N_θ. La séquence de Farey-Haros et ses symétriques $\mathcal{FH}_n$ est choisie de manière plus arbitraire que dans la section précédente. La MSE des reconstructions Mojette à partir du sinogramme interpolé est reportée dans le tableau 5.16. La figure 5.17 permet de comparer le PSNR obtenu pour les reconstructions Mojette et pour les reconstructions avec les méthodes de référence.

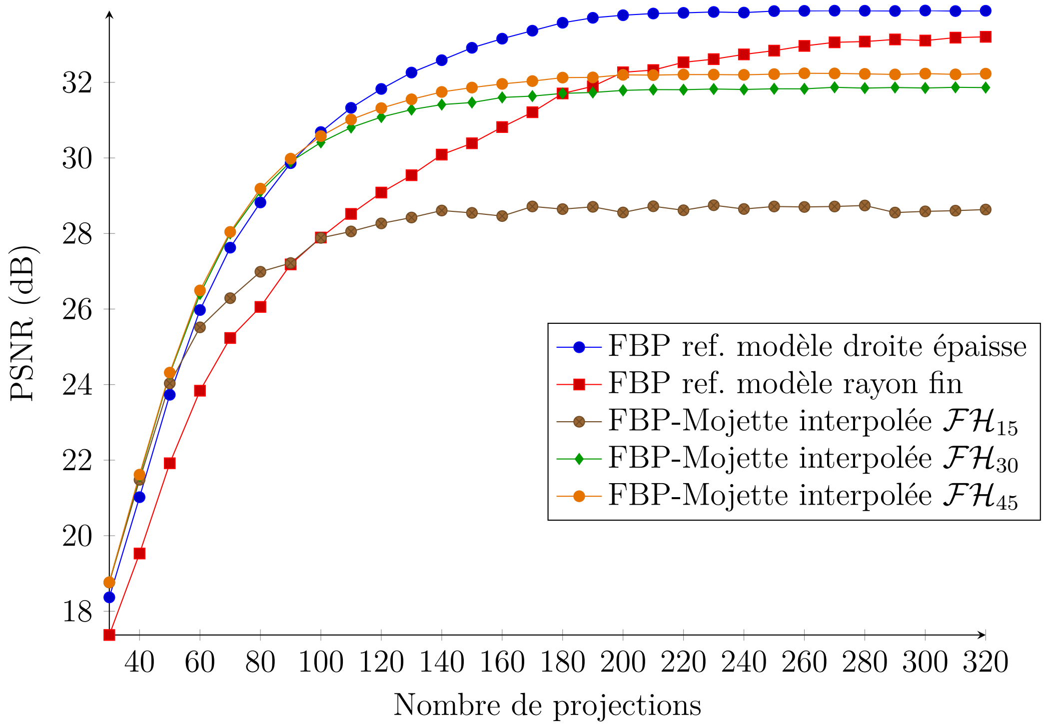
N_θ	30	70	110	150	190	230	270	310
FBP								
Mojette $\mathcal{FH}_{15}$	1,330	0,235	0,157	0,140	0,135	0,133	0,134	0,138
Mojette $\mathcal{FH}_{30}$	1,327	0,158	0,083	0,071	0,067	0,066	0,065	0,065
Mojette $\mathcal{FH}_{45}$	1,328	0,157	0,079	0,065	0,061	0,060	0,060	0,060
Radon droite épaisse	1,456	0,173	0,074	0,051	0,043	0,041	0,041	0,041
SART								
Mojette $\mathcal{FH}_{15}$	0,736	0,202	0,119	0,095	0,091	0,086	0,085	0,087
Mojette $\mathcal{FH}_{30}$	0,732	0,162	0,074	0,053	0,043	0,040	0,040	0,039
Mojette $\mathcal{FH}_{45}$	0,732	0,161	0,071	0,050	0,040	0,038	0,037	0,037
Radon droite épaisse	0,728	0,154	0,074	0,057	0,051	0,055	0,061	0,065

Tableau 5.16 – MSE (arrondie à la 3e décimale) mesurée entre les reconstructions Mojette et l'image de référence pour la méthode de ré-échantillonnage PP

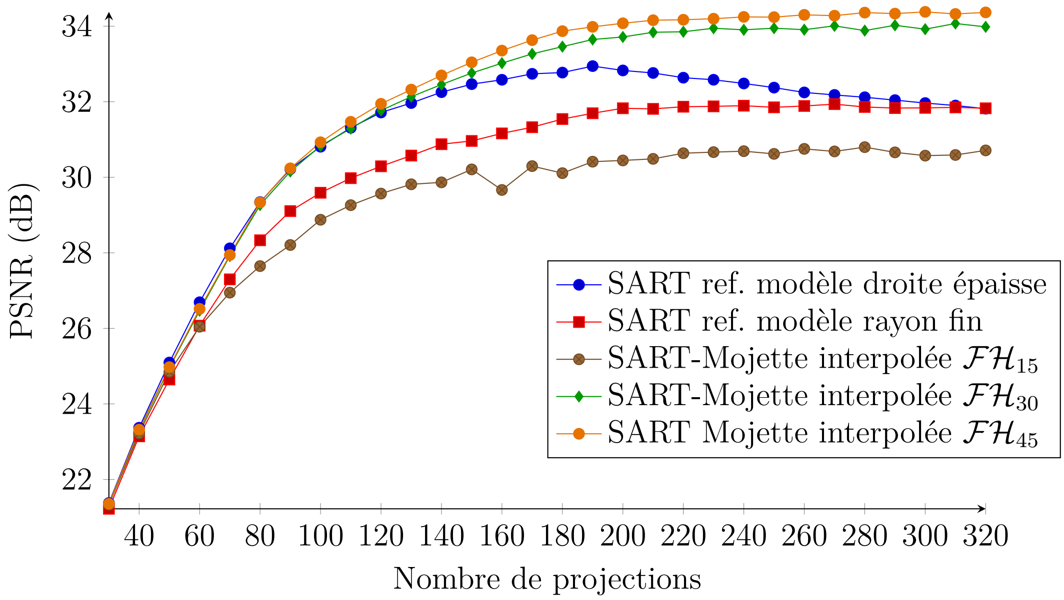
Dans le tableau 5.16, les lignes *Radon droite épaisse* rappellent, à titre de comparaison, les résultats obtenus avec les méthodes de référence en utilisant un modèle de droite épaisse (dernière ligne des tableaux 5.5 et 5.7).

Nous pouvons voir dans la figure 5.17a que les scores de rapport signal sur bruit sont globalement rehaussés par rapport à la méthode de ré-échantillonnage ANG. Ceux-ci deviennent compétitifs par rapport aux reconstructions FBP de référence. De plus, nous pouvons noter que le gain de qualité entre l'utilisation de $\mathcal{FH}_{30}$ et $\mathcal{FH}_{45}$ est faible, ce qui laisse à penser que l'on atteint un plateau de qualité pour la reconstruction FBP-Mojette K^0. Ces résultats confirment le fait connu que l'algorithme de rétroprojection filtrée est sensible à l'ensemble de directions de projections considéré, et que l'utilisation d'un ensemble de projections équi-répartis angulairement améliore significativement la qualité des reconstructions obtenues.

Pour les méthodes itératives, nous observons dans la figure 5.17b que les reconstructions SART-Mojette en utilisant $\mathcal{FH}_{30}$ et $\mathcal{FH}_{45}$ surpassent les reconstructions SART de référence. Nous arrivons ici à des niveaux de PSNR comparables avec les reconstructions SART-Mojette à partir d'un sinogramme Mojette idéal que nous pouvons voir à la figure 5.12b. Une nouvelle fois, nous notons un gain de qualité minime entre l'utilisation de $\mathcal{FH}_{30}$ et $\mathcal{FH}_{45}$. L'algorithme itératif SART est donc lui aussi fortement sensible aux directions de projections considérées.



(a) FBP-Mojette



(b) SART-Mojette

FIGURE 5.17 – PSNR pour les reconstructions FBP-Mojette (a) et SART-Mojette (b) à partir de sinogrammes interpolés avec la deuxième méthode PP

	30 projections	100 projections	180 projections	250 projections	320 projections
FBP-Mojette $\mathcal{FH}_{15}$					
FBP-Mojette $\mathcal{FH}_{30}$					
FBP-Mojette $\mathcal{FH}_{45}$					

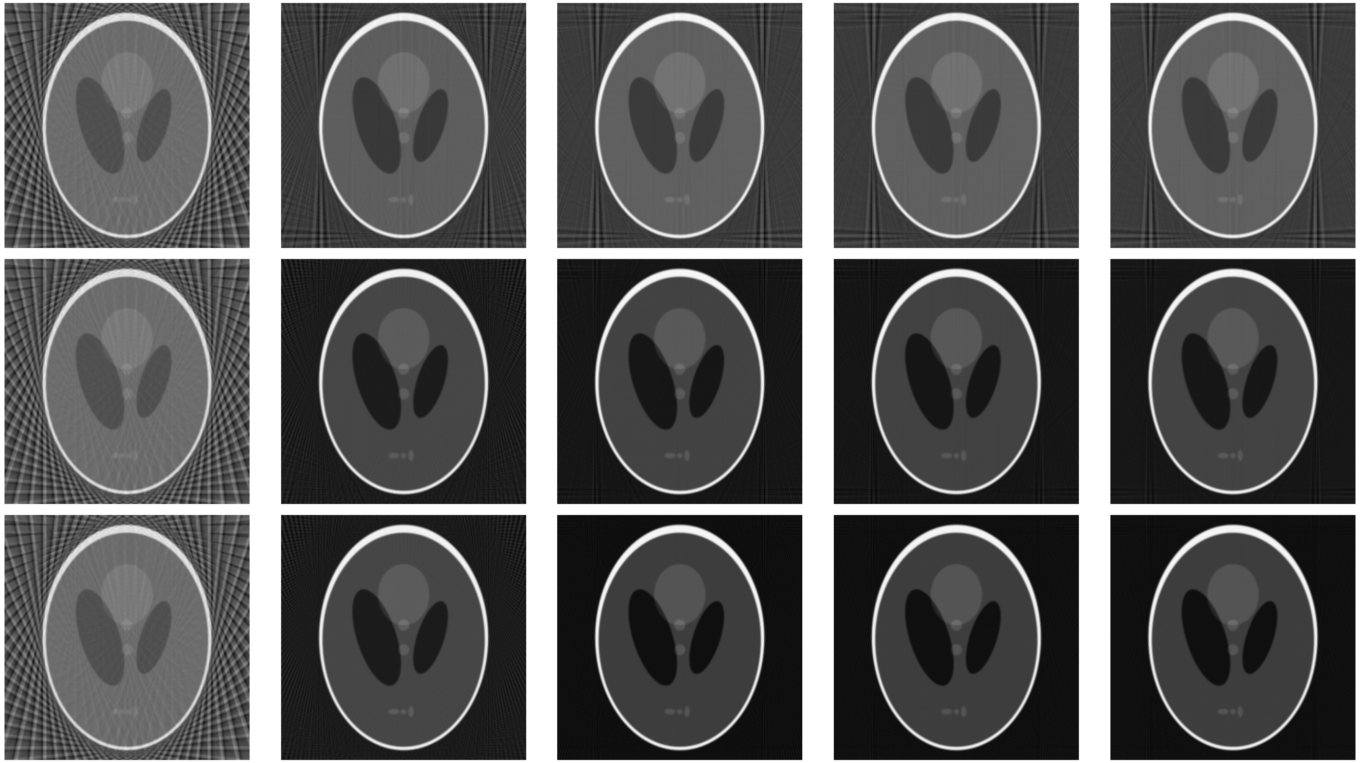


Tableau 5.18 – Images de reconstructions FBP-Mojette à partir de sinogrammes interpolés la méthode PP

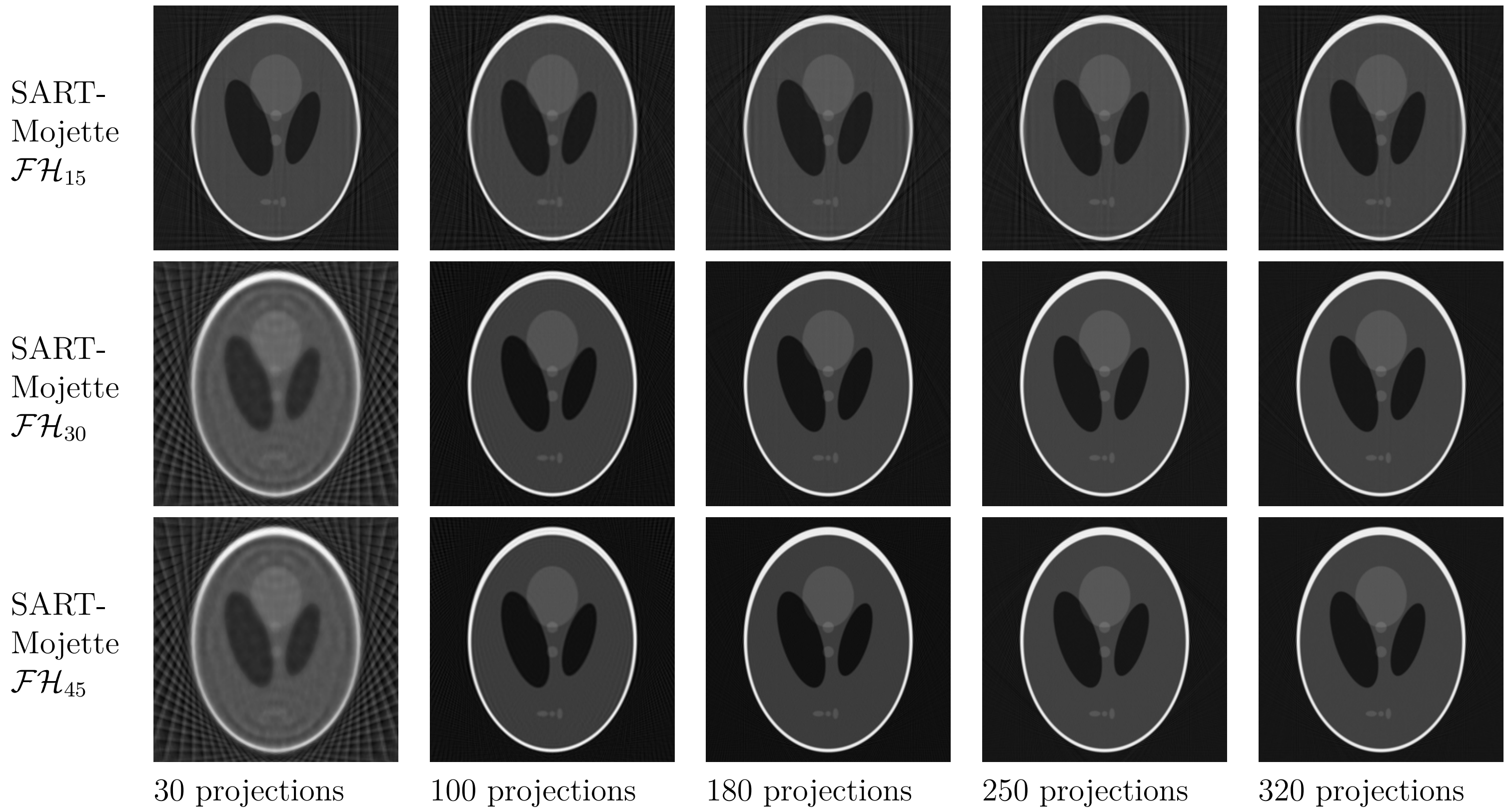


Tableau 5.19 – Images de reconstructions SART-Mojette à partir de sinogrammes interpolés avec la méthode PP

5.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que la transformée Mojette discrète pouvait être appliquée pour la reconstruction de sinogrammes réels. En particulier, deux méthodes d'interpolation ont été présentées pour estimer des projections Mojette depuis un ensemble de projections dans l'espace de RADON. La première méthode, ANG, sur-échantillonne angulairement l'ensemble des directions de projection pour construire un sinogramme Mojette complet. La seconde méthode, PP, assimile chaque projection Radon par une projection Mojette de direction suffisamment proche. Cette méthode permet d'obtenir un ensemble d'angles discrets répartis de manière la plus uniforme possible.

Des expériences, réalisées sur des données simulées, ont montré que le passage dans l'espace Mojette se fait sans perte d'efficacité par rapport aux autres méthodes de reconstruction existantes. La différence notable de performance entre les deux méthodes ANG et PP montrent que le choix d'un ensemble de directions discrètes est d'importance capitale pour la reconstruction tomographique de données issues de dispositifs tomographiques réels en utilisant la transformée Mojette. Nous avons montré en particulier qu'une répartition angulaire régulière des directions de projection donne de meilleurs résultats que l'utilisation d'une séquence de FAREY-HAROS complète. Cette conclusion, bien qu'elle soit intuitive en tomographie classique basée sur la transformée de RADON continue, est contre-intuitive en tomographie discrète. En effet, nous avions montré dans le chapitre 3 que les séquences de FAREY-HAROS et leurs symétriques permettent de lister de manière exhaustive l'ensemble des directions discrètes contenues dans une image discrète de taille finie. Il semblait donc, dans une première approche, cohérent de penser qu'il en serait de même dans nos expériences.

Enfin, les résultats obtenus pour la méthode de ré-échantillonnage PP permettent de mettre en évidence l'importance de l'échantillonnage en tomographie, que ce soit pour les méthodes analytiques ou itératives. En particulier avec cette dernière classe d'algorithme de reconstruction, nous avons montré dans nos expériences l'intérêt d'utiliser la transformée Mojette dans un cadre de tomographie réelle.

Chapitre 6

Inversion algébrique exacte des transformées FRT et Mojette

L'objectif de ce chapitre est de proposer un nouveau cadre algébrique pour exprimer la transformée Mojette ainsi que son inverse, fondamentalement différent de la représentation classique matricielle.

Sommaire

6.1 Introduction

Un problème physique ou mathématique peut être abordé sous deux angles :

— soit pour une représentation fixée, on cherche des méthodes et solutions pour calculer les solutions de manière plus efficace ;

— soit on cherche d'autres représentations, un exemple marquant de ces dernières années étant l'échantillonnage compressé.

La tomographie discrète et l'utilisation de la transformée Mojette font partie de la seconde catégorie, où on remplace le paradigme continu par un paradigme issu de la géométrie discrète. Dans le cadre des transformées de RADON discret, nous avons vu des algorithmes permettant de calculer une solution exacte sous réserve de disposer d'un ensemble exhaustif de données pour la transformée Mojette et FRT, et d'autres algorithmes comme la FBP-Mojette ou SART-Mojette permettant de reconstruire des images à partir de mesures incomplètes ou incohérentes. Ces méthodes utilisent la même représentation classique d'une image sous forme géométrique, qu'elle soit représentée sous forme matricielle ou sous forme fonctionnelle.

Dans ce chapitre, nous cherchons à définir une nouvelle représentation commune à la transformée Mojette et à la FRT. Cet espace de représentation est issu de la théorie des corps finis et des anneaux euclidiens. Après avoir défini les structures algébriques, nous y transcrirons les transformées Mojette et FRT, qui ont alors une formulation, ainsi que des méthodes d'inversion, unifiées.

6.2 Représentation polynomiale de la FRT

La *Finite Radon Transform* (FRT) transforme une image carrée de taille $p \times p$, où p est un entier naturel positif premier, en un ensemble de $p + 1$ projections composées de p bins chacune. Au chapitre 2, nous en avons exposés quelques principes de bases ainsi que certains de ses liens étroits avec la transformée Mojette. Dans cette section, nous allons décrire la FRT de façon matricielle.

6.2.1 Transformée FRT et formalisme polynomial : description intuitive

Rappelons l'expression de la FRT pour une image f de taille $p \times p$:

$$\mathrm{FRT}\, f(t,m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_{l=0}^{p-1} f(k,l) \Delta \left(\langle k - ml - t \rangle_p \right) & \text{si } 0 \leq m < p \\ \sum_{k=0}^{p-1} f(k,t) & \text{si } m = p \end{cases}, \tag{6.1}$$

où $\langle n \rangle_p \equiv n \pmod p$.

L'équation (6.1) montre que l'on peut calculer les projections dans chaque direction $(m,1)$ en sommant périodiquement un pixel par ligne, après un décalage horizontal de m pixels vers la droite. Cette opération est équivalente à opérer un décalage horizontal circulaire de ml pixels vers la gauche sur chaque ligne l, puis en sommant les colonnes.

Dans [125], N. Normand, I. Svalbe *et al.* proposent une représentation polynomiale des images et du système FRT. Soit f une image composée de p lignes et de p colonnes. Pour les représentations matricielles que nous avons rencontrées au long de cette thèse, f est représentée soit par une matrice de taille $p \times p$, soit par un vecteur de taille p^2. Dans cette représentation polynomiale, l'image f est vue comme un vecteur de p lignes, chaque ligne étant représentée par un polynôme de degré p. Nous notons $\boldsymbol{f}$ l'image f représentée sous cette forme. En d'autres termes,

$$\boldsymbol{f} = \left(P_0 \cdots P_{p-1} \right)^\top, \tag{6.2}$$

où pour chaque ligne i, $P_i(x) = f(i,0)x^0 + \cdots + f(i,p-1)_{p-1}x^{p-1}$.

Pour représenter la périodicité des images, remarquons que $f(p,p) = f(0,0)$. La condition sur les polynômes est donc $x^p \equiv x^0$. Les polynômes $P_0, \ldots, P_{p-1}$ sont ainsi définis modulo $(x^p - 1)$. En utilisant ce formalisme, nous caractérisons chaque ligne R_m, $m \neq p$, de la FRT de l'image $\boldsymbol{f}$ par :

$$R_m(x) = P_0(x) + x^{-m}P_1(x) + \cdots + x^{-(p-1)m}P_{p-1}(x). \tag{6.3}$$

Et en utilisant la périodicité définie précédemment, qui intervient dans l'espace de l'image comme dans l'espace de sa transformée, nous obtenons :

$$R_m(x) = P_0(x) + x^{\langle -m\rangle_p} P_1(x) + \cdots + x^{\langle -(p-1)m\rangle_p} P_{p-1}(x). \tag{6.4}$$

Enfin, la compilation des p premières lignes R_m, nous permet d'obtenir le système matriciel suivant :

$$\mathrm{FRT}^* \boldsymbol{f} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x^{-1} & \cdots & x^{-(p-1)} \\ \vdots & & & \\ 1 & x^{-(p-1)} & \cdots & x^{-(p-1)^2} \end{pmatrix}}_{\mathbf{V}_p} \times \underbrace{\begin{pmatrix} P_0(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ P_{p-1}(x) \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{f}}, \tag{6.5}$$

où FRT* correspond aux p premières lignes de la transformée FRT.

La matrice $\mathbf{V}_p$ est une matrice de VANDERMONDE symétrique, c'est-à-dire que les coefficients sur chaque ligne suivent une progression géométrique. Nous allons utiliser cette propriété pour dériver un algorithme de projection et reconstruction pour la FRT et la transformée Mojette.

6.2.2 Description formelle

Nous avons utilisé à la section 6.2.1 une correspondance entre la notion de polynôme et la notion de décalage à gauche. Nous allons à présent poser un cadre mathématique formel pour notre étude et montrer que cette analogie est légitime. L'annexe B contient quelques rappels d'algèbre ainsi que les définitions des termes que nous allons utiliser dans la suite. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'établir l'équivalence entre la représentation polynomiale et la représentation géométrique de la FRT.

6.2.2.1 Application à la FRT

À présent, concentrons-nous sur l'opérateur de décalage à droite, également appelé opérateur de retour arrière dans la littérature. Soit τ cet opérateur agissant sur une fonction discrète $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall m \in \mathbb{Z},\ (\tau g)(m) = g(m-1).$$

À un polynôme $p(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i x^i$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ on associe l'opérateur de décalage $p(\tau)$ défini par :

$$p(\tau) = \sum_{i=0}^{n} p_i \tau^i.$$

Nous vérifions que les opérations sont encore compatibles :

$$\begin{cases} (p+q)(\tau) = p(\tau) + q(\tau) \\ (p \times q)(\tau) = p(\tau) \circ q(\tau), \end{cases}$$

où $\circ$ désigne la composition d'opérateurs.

Démonstration. Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{N} p_i x^i$ et $q(x) = \sum_{i=0}^{M} q_i x^i$.

$$\begin{aligned}
\forall f \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}, \forall m \in \mathbb{Z},\ (p(\tau) \circ q(\tau)) f(m) &= \left[\left(\sum_{i=0}^{N} p_i \tau^i\right) \circ \left(\sum_{j=0}^{M} q_j \tau^j\right)\right](f)(m) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{N} p_i \tau^i\right)\left[\left(\sum_{j=0}^{M} q_j \tau^j\right) f\right](m) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{N} p_i \tau^i\right) \sum_{j=0}^{M} q_j f(m-j) \\
&= \sum_{i=0}^{N} p_i \left[\tau^i \sum_{j=0}^{M} q_j f\right](m-j) \\
&= \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} p_i q_j f(m-j-i) \\
&= \sum_{k=0}^{N+M} \sum_{j=0}^{M} p_{k-j} q_j f(m-k) \\
&= \sum_{k=0}^{N+M} \sum_{j=0}^{k} p_{k-j} q_j f(m-k) \\
&= (p \times q)(\tau) f(m)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\forall f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{K}, \forall m \in \mathbb{Z},\ (p+q)(\tau)f(m) &= \left(\sum_{i=0}^{\max(N,M)} (p_i+q_i)\tau^i\right) f(m) \\
&= \sum_{i=0}^{\max(N,M)} (p_i+q_i) f(m-i) \\
&= \sum_{i=0}^{\max(N,M)} p_i f(m-i) + \sum_{i=0}^{\max(N,M)} q_i f(m-i) \\
&= \sum_{i=0}^{N} p_i f(m-i) + \sum_{i=0}^{M} q_i f(m-i) \\
&= p(\tau)f(m) + q(\tau)f(m)
\end{aligned}
$$

□

6.2.2.2 Prise en compte de la périodicité

Nous souhaitons rendre l'opérateur τ p-circulaire, c'est-à-dire que $\tau^p = \mathrm{Id}$. Reconsidérons à présent notre opérateur de décalage. Nous introduisons l'opérateur de décalage circulaire de période p, noté τ_p, qui agit sur les fonctions $f\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$. Comme précédemment, nous pouvons associer cet opérateur à un polynôme $p(x)$. Cependant ici, $\mathbb{K}[x]$ et $\mathbb{K}[\tau_p]$ ne sont pas isomorphes — intuitivement, le deuxième est plus petit car cyclique) — mais il est isomorphe avec $\mathbb{K}[x]/(x^p - 1)$. Nous avons donc une équivalence entre $\mathbb{K}[x]/(x^p - 1)$ et $\mathbb{K}[\tau_p]$ et donc $\mathbb{K}[\tau_p]/(\tau_p^p - 1)$.

Nous vérifions comme précédemment que :

$$
\begin{cases}
(p+q)(\tau_p) = p(\tau_p) + q(\tau_p) \\
(p \times q)(\tau_p) = p(\tau_p) \circ q(\tau_p).
\end{cases}
$$

6.2.2.3 Extension aux matrices

Les résultats précédents sur les polynômes s'étendent naturellement aux matrices polynomiales. À une matrice polynomiale $\mathbf{M}(x)$ d'élément courant $m_{i,j} \in \mathbb{K}[x]$ on associe la matrice $M(\tau)$ de même taille et à valeurs dans $\mathbb{K}[\tau]$. Les lois d'addition et de multiplication matricielle restent compatible avec la nouvelle structure. On peut donc maintenant identifier l'opérateur FRT* avec la matrice polynomiale, y compris dans l'anneau quotient. Dans le reste du chapitre, nous identifions également $f\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{K}$ à $\hat{f}(x) \in \mathbb{K}/(x^p-1)\mathbb{K}[x]$. Cela nous permet, par abus de notation, d'identifier $(p(\tau)f(0), \cdots, p(\tau)f(p-1))$ à $p(x)\hat{f}(x)$.

6.2.3 Inversibilité du système de Vandermonde

Pour que le système (6.5) soit inversible, il faut que $\mathbf{V}_p$ soit unimodulaire. En d'autres termes, le déterminant de $\mathbf{V}_p$ doit être lui-même inversible. Son expression est :

$$\det(\mathbf{V}_p) = \prod_{0\leq i<j<p} x^j - x^i. \tag{6.6}$$

6.2.3.1 Inversibilité dans l'anneau $\mathbb{K}[x]/(x^p-1)\mathbb{K}[x]$

Le système (6.5) n'est pas inversible dans $\mathbb{K}[x]/(x^p-1)\mathbb{K}$. En effet, le déterminant de $\mathbf{V}_p$ n'est pas inversible dans cet anneau car il n'est pas premier avec le polynôme x^p-1. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que le polynôme constant 1 est racine des deux polynômes, donc ils peuvent être tous deux factorisés par $(x-1)$.

La matrice $\mathbf{V}_p$ n'est donc pas inversible. Cela signifie que son noyau, donc l'espace nul de l'opérateur FRT* n'est pas réduit au vecteur nul. Déterminons le noyau de $\mathbf{V}_p$:

$$\ker(\mathbf{V}_p) = \left\{ \begin{pmatrix} c_0\left(1+x+\cdots+x^{p-1}\right) \\ \vdots \\ c_{p-1}\left(1+x+\cdots+x^{p-1}\right) \end{pmatrix} \middle| \sum_{i=0}^{p-1} c_i = 0 \right\}. \tag{6.7}$$

Démonstration. La démonstration repose sur le fait que $\forall P(x) \in \mathbb{K}[x]/(x^p-1)\mathbb{K}[x]$, on a $(1+x+\cdots+x^{p-1})P(x) = P(1)(1+x+\cdots+x^{p-1})$.

$$\forall \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_0(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{0,i} x^i \\ \vdots \\ y_{p-1}(x) = \sum_{i=0}^{p-1} a_{p-1,i} x^i \end{pmatrix} \in \mathbb{K}[x]^p$$

$$\mathbf{V}_p \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_0(x) + y_1(x) + \cdots + y_{p-1}(x) = 0 \\ y_0(x) + x^{p-1} y_1(x) + x^{p-2} y_2(x) + \cdots + x y_{p-1}(x) = 0 \\ y_0(x) + x^{p-2} y_1(x) + x^{\langle 2(p-2) \rangle_p} + \cdots + x^2 y_{p-1}(x) = 0 \\ \vdots \\ y_0(x) + x y_1(x) + x^2 y_2(x) + \cdots + x^{p-1} y_{p-1}(x) = 0 \end{pmatrix}.$$

Notons L_j la j^{e} ligne de ce système. Nous obtenons un nouveau système en substituant chaque ligne par : $L_j \leftarrow \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} x^{jk} L_k$ pour la première ligne nous obtenons :

$$\mathbf{V}_p \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_0(x) + \frac{1}{p}(1 + x + \cdots + x^{p-1})(y_1(x) + \cdots + y_{p-1}(x)) = 0 \\ y_1(x) + \frac{1}{p}(1 + x + \cdots + x^{p-1})(y_0(x) + y_2(x) + \cdots + y_{p-1}(x)) = 0 \\ \vdots \\ y_{p-1}(x) + \frac{1}{p}(1 + x + \cdots + x^{p-1})(y_0(x) + \cdots + y_{p-2}(x)) = 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_0(x) = -\frac{y_1(1) + \cdots + y_{p-1}(1)}{p}(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \\ y_1(x) = -\frac{y_0(1) + y_2(1) + \cdots + y_{p-1}(1)}{p}(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \\ \vdots \\ y_{p-1}(x) = -\frac{y_0(1) + \cdots + y_{p-2}(1)}{p}(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \end{pmatrix}.$$

Voilà que nous avons établi la première partie du résultat, à savoir :

$$\mathbf{V}_p \boldsymbol{y} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} c_0(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \\ \vdots \\ c_{p-1}(1 + x + \cdots + x^{p-1}) \end{pmatrix}.$$

Il nous reste à établir la relation entre les constantes c_i. Pour cela, raisonnons sur la somme des coefficients des composantes de $\boldsymbol{y}$:

$$\begin{pmatrix} y_0(x) & = -\frac{y_1(1)+\cdots+y_{p-1}(1)}{p} & (1+x+\cdots+x^{p-1}) \\ y_1(x) & = -\frac{y_0(1)+y_2(1)+\cdots+y_{p-1}(1)}{p} & (1+x+\cdots+x^{p-1}) \\ \vdots & & \\ y_{p-1}(x) & = -\frac{y_0(1)+\cdots+y_{p-2}(1)}{p} & (1+x+\cdots+x^{p-1}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_0(1) & = y_1(1)+\cdots+y_{p-1}(1) \\ y_1(1) & = y_0(1)+y_2(1)+\cdots+y_{p-1}(1) \\ \vdots & \\ y_{p-1}(1) & = y_0(1)+\cdots+y_{p-2}(1) \end{pmatrix}.$$

Et enfin en sommant toutes les lignes de ce système, nous remarquons que chaque terme $y_i(1)$ apparaît exactement $p-1$ fois dans les membres de droite :

$$y_0(1)+\cdots+y_{p-1}(1) = (p-1)\Big(y_0(1)+\cdots+y_{p-1}(1)\Big).$$

En prenant $p > 2$, nous avons immédiatement $y_0(1)+\cdots+y_{p-1}(1) = 0$.

Réciproquement, l'ensemble de solution obtenu est bien solution du premier système, ce qui termine la démonstration. $\square$

Notons que l'on retrouve ici un résultat connu pour la transformée FRT*, appelé *fantôme universel*. Ainsi sans relation supplémentaire, comme la somme de chaque ligne de l'image dans la transformée FRT classique, il n'est possible de recouvrer chaque ligne de l'image uniquement à une constante près sur chaque pixel de cette ligne.

6.2.3.2 Inversibilité dans l'anneau $\mathbb{K}[x]/(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1})\mathbb{K}[x]$

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que nous ne pouvons recouvrer l'image originale de manière exacte. Par contre, nous pouvons la retrouver à une constante près sur chaque ligne, telle que la somme de chacune de ces constantes est nulle.

Nous allons relaxer le problème en nous autorisant à retrouver chaque ligne à une constante près, quelle que soit cette constante. Cette manipulation permet non seulement de rendre le système inversible, mais également de découpler la résolution de chaque ligne : la constante sur une ligne ne dépendant plus des autres lignes.

En d'autres termes, nous quotientons l'anneau initial par le noyau de $\mathbf{V}_p$. Nous considérons donc maintenant l'anneau quotient $(\mathbb{K}[x]/(x^p-1)\mathbb{K}[x])/((1+x+...+x^{p-1})\mathbb{K}[x]/(x^p-1)\mathbb{K}[x])$, qui est l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, périodiques de période p et dont la somme des coefficients n'a pas d'importance. Le (troisième) théorème d'isomorphisme permet d'affirmer que cet ensemble est isomorphe à $\mathbb{K}[x]/(1+x+\cdots+x^{p-1})\mathbb{K}[x]$. C'est dans cet ensemble que nous allons à présent travailler.

Proposition 6.1. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $n < p$ premiers entre eux.
Soit $P(x) = x^n - 1 \in \mathbb{K}[x]/(1+x+\cdots+x^{p-1})\mathbb{K}[x]$.
Alors $P^{-1}(x)$ existe et $P^{-1}(x) = \dfrac{1}{p}\sum_{i=0}^{p-1} ix^{ni}$.

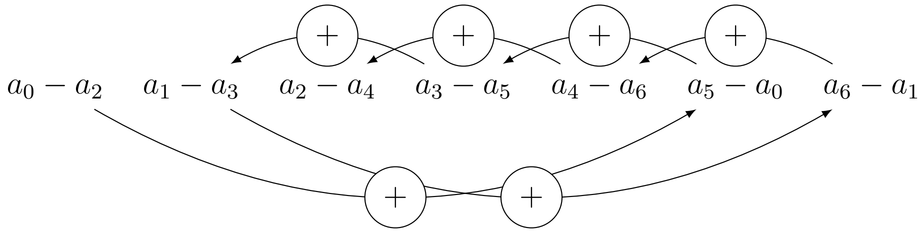
Démonstration. $\forall p > 2 \in \mathbb{N}$, $\forall n < p$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}(x^n-1)\sum_{i=0}^{p-1} ix^{ni} &= \frac{1}{p}\left(\sum_{i=0}^{p-1} ix^{n+in} - \sum_{i=1}^{p-1} ix^{in}\right) = \frac{1}{p}\left(\sum_{i=1}^{p-1} ix^{(i+1)n} - \sum_{i=1}^{p-1} ix^{in}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\sum_{i=2}^{p}(i-1)x^{in} - \sum_{i=1}^{p-1} ix^{in}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\sum_{i=2}^{p-1}(i-1)x^{in} + (p-1) - \sum_{i=1}^{p-1} ix^{in}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(p-1+\sum_{i=2}^{p-1}\Big((i-1-i)x^{in} - x^n\Big)\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(p-1-\sum_{i=1}^{p-1} x^{in}\right) = \frac{1}{p}\left(p-\sum_{i=0}^{p-1} x^{in}\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(p-\sum_{i=0}^{p-1} x^{i}\right) \quad \text{car } n \text{ et } p \text{ sont premiers entre eux} \\
&= \frac{p}{p} = 1
\end{aligned}$$

$\square$

$A(x)$	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
$B(x) = (1 - x^5)A(x)$	$a_0 - a_2$	$a_1 - a_3$	$a_2 - a_4$	$a_3 - a_5$	$a_4 - a_6$	$a_5 - a_0$	$a_6 - a_1$
$B(x)/(1 - x^5)$	$a_0 - a_2$	$a_1 - a_3 + a_3 - a_2 = a_1 - a_2$	$a_2 - a_4 + a_4 - a_2 = a_2 - a_2$	$a_3 - a_5 + a_5 - a_2 = a_3 - a_2$	$a_4 - a_6 + a_6 - a_2 = a_4 - a_2$	$a_5 - a_0 + a_0 - a_2 = a_5 - a_2$	$a_6 - a_1 + a_1 - a_2 = a_6 - a_2$

(a) Intégration cyclique



(b) Ordre des additions

FIGURE 6.2 – (a) Restauration du polynôme $A(x)$ à partir de $B(x) = (1 - x^s)A(x)$ par intégration cyclique (cf. proposition 6.1). Nous obtenons $A(x)$ à une constante près (ici, $-a_2$). La somme de tous les coefficients est donc p fois cette constante plus importante que dans le polynôme original. Ici, $s = 5$ et $p = 7$. (b) Ordre des additions dans l'intégration cyclique, effectuer un cycle complet pour obtenir chaque coefficient

6.2.4 Méthodes de résolution

Une méthode de résolution classique d'un système linéaire $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ est de calculer $\mathbf{A}^{-1}$, l'inverse de $\mathbf{A}$ lorsqu'elle existe, et d'en déduire $\boldsymbol{x} = \mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.

6.2.4.1 Inversion directe de la matrice

Dans notre cas périodique, la matrice décrivant la transformation FRT* possède un inverse très similaire à la matrice $\mathbf{V}_p$ d'origine :

$$\mathbf{V}_p^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^{p-1} \\ 1 & x^2 & x^4 & \cdots & x^{2(p-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x^{p-1} & x^{2(p-1)} & \cdots & x^{(p-1)^2} \end{pmatrix}. \tag{6.8}$$

Cette solution est simple et élégante. Cependant, cette inversion ne fonctionne que lorsque l'on détient le jeu de projections complet pour la transformation FRT*.

6.2.4.2 Algorithme de Å. Björck et V. Pereyra

L'algorithme de Å. Björck et V. Pereyra permet de résoudre un système d'équation $\mathbf{V}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ où $\mathbf{V}$ est une matrice de Vandermonde [17]. Il est décrit dans l'algorithme 6.3. Cet algorithme possède plusieurs propriétés intéressantes, comme le fait de n'utiliser que des opérations de base, à savoir des soustractions et une multiplication et une division. Ces opérations peuvent être mises en œuvre dans l'anneau des polynômes que nous venons de décrire. Ainsi, l'addition revient à une simple addition vectorielle. La multiplication de deux polynômes revient à une convolution discrète dans le cas général et se réduit à un décalage entier si un des opérandes est un monôme. La dernière opération de division est sans doute la plus délicate car elle revient dans le cas général à un problème de déconvolution. Cependant, la division par un terme $(x^{-a} - x^{-b})$ comme nous avons ici se réduit à une opération de filtrage récursif décrite à la figure 6.2.

Une autre propriété intéressante de cet algorithme est de résoudre le système en place, c'est-à-dire sans utiliser de mémoire supplémentaire pour stocker le résultat. Ainsi, en se basant sur l'algorithme 6.3 — c'est-à-dire en utilisant uniquement des multiplications, des additions et des décalages entiers sur les lignes — nous pouvons écrire un algorithme en place calculant $\boldsymbol{y}$ à partir de $\mathbf{V}$ et $\boldsymbol{x}$. L'algorithme 6.4, récemment décrit par N. Normand, détaille ce processus. De ce fait, cet algorithme permet de calculer en place la FRT d'une image.

6.2.5 Bilan

Nous avons montré que la FRT pouvait être décrite dans formalisme algébrique particulier en considérant chaque ligne de l'image comme un polynôme cyclique. L'opération de projection FRT résultante est une opération de multiplication matricielle entre une matrice de projection et l'image représentée par un vecteur de lignes. Après avoir décrit une structure algébrique dans laquelle la matrice de projection pouvait être inversée, nous avons décrit un algorithme de reconstruction

Algorithme 6.3: Algorithme de résolution d'un système de VANDERMONDE [17] $Va = b$ où V est une matrice de VANDERMONDE de taille $n \times n$ avec une progression géométrique sur chaque ligne $v_{i,j} = \alpha_i^j, (i,j) \in [0, n-1]^2$.

Entrée : Taille de la matrice : n
Entrée : α_i : raison de la progression géométrique de la ligne $i \in [0, n-1]$
Entrée/Sortie : En entrée, a contient $b = Va$, en sortie, contient le résultat a

```
pour k ← 0 à n − 2 faire
    pour j ← n − 1 décroissant jusque k + 1 faire
        a[j] ← a[j] − a[j − 1];
        a[j] ← a[j]/(α[j] − α[j − k − 1]);
    fin
fin
pour k ← n − 2 décroissant jusque 0 faire
    pour j ← k à n − 2 faire
        a[j] ← a[j] − α[k] × a[j + l];
    fin
fin
```

Algorithme 6.4: Algorithme direct VANDERMONDE, dérivé de l'algorithme 6.3. Cet algorithme calcule $y = Vx$ où V est une matrice de VANDERMONDE $n \times n$ avec une progression géométrique sur chaque ligne : $v_{i,j} = \alpha_i^j, (i,j) \in [0, n-1]^2$.

Entrée : Taille de la matrice : n
Entrée : α_i : raison de la progression géométrique de la ligne $i \in [0, n-1]$
Entrée/Sortie : En entrée, a_i contient a, en sortie, contient le résultat $b = Va$

```
pour k ← 0 à n − 2 faire
    pour j ← n − 2 décroissant jusque k faire
        a[j] ← a[j] + α[k] × a[j + l];
    fin
fin
pour k ← n − 2 décroissant jusque 0 faire
    pour j ← k + 1 à n − 1 faire
        a[j] ← a[j] × (α[j] − α[j − k − 1]);
        a[j] ← a[j] + a[j − 1];
    fin
fin
```

spécifique qui tire parti des opérations dans l'anneau des polynômes. Nous allons maintenant nous intéresser à la transformée Mojette.

6.3 Représentation polynomiale de la transformée Mojette

La transformée Mojette et la transformée FRT sont fortement liées : nous pouvons voir la seconde comme une version périodique de la première. Cette section vise à appliquer le formalisme algébrique de la FRT à la transformée Mojette.

Dans cette section, l'image f de taille $P \times Q$ à projeter et à reconstruire est représentée par un vecteur de polynômes de degré $P-1$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$:

$$\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} f_0(x) = \sum_{k=0}^{P-1} f(k,0)x^k \\ \vdots \\ f_{Q-1}(x) = \sum_{k=0}^{P-1} f(k,Q-1)x^k \end{pmatrix}.$$

Enfin, sans perte de généralité, nous apportons ici une légère modification à la définition originale de la transformée Mojette. Nous calculerons ici la transformée Mojette suivant un angle discret (p,q) par la formule suivante :

$$\mathcal{M}_{p,q}\boldsymbol{f}(b) = \sum_{k=0}^{P-1}\sum_{l=0}^{Q-1} f(k,l)\Delta(b-kq+pl).$$

6.3.1 Projections Mojette sur des angles de la forme $(p,1)$

Nous avons vu que les directions discrètes de projection en FRT* revenaient toutes à des directions de type $(p,1)$. Nous allons commencer par étudier leur équivalent pour la transformée Mojette, qui n'est pas périodique. Comme précédemment, nous allons tout d'abord nous attacher à formuler une projection, puis analyser la matrice de projection obtenue pour plusieurs projections discrètes distinctes.

6.3.1.1 Étude d'une projection d'angle $(p,1)$

Considérons maintenant une projection d'angle $(p,1)$:

$$\mathcal{M}_{p,1}\boldsymbol{f}(b)=\sum_{l=0}^{Q-1}\sum_{k=0}^{P-1}f(k,l)\Delta(b-k+pl).$$

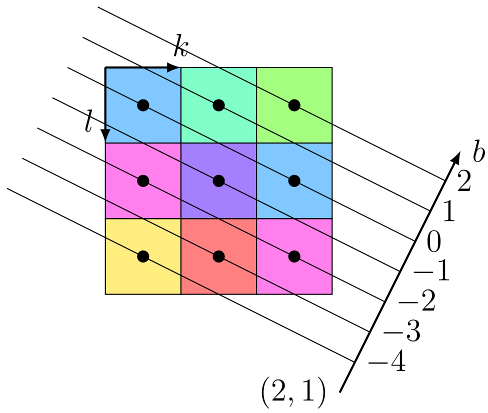
Nous pouvons exprimer cette projection sous forme de polynôme de Laurent en associant chaque bin $\mathcal{M}_{p,1}\boldsymbol{f}(b)$ au monôme $\mathcal{M}_{p,1}\boldsymbol{f}(b)x^b$. On a enfin, $\mathcal{M}_{p,1}\boldsymbol{f}(x)=\sum_{b\in\mathbb{Z}}\mathcal{M}_{p,1}\boldsymbol{f}(b)x^b$. Cette identification est bien entendue licite du fait que seulement un nombre fini de bins sont non-nuls sur une image à support borné.

Dans ces conditions, et contrairement à la section précédente où l'on considérait une transformée périodique, nous considérons également l'opérateur inverse du décalage à droite — en d'autres termes l'opération de décalage à gauche — que nous noterons τ^{-1}. À l'instar de la section précédente, à un polynôme de Laurent $p(x)\in\mathbb{K}[x,x^{-1}]$ nous associons l'opérateur $p(\tau)$. Les polynômes de Laurent respectant la structure d'anneau commutatif intègre, les mêmes considérations que sur l'anneau des polynômes formels sont encore valables.

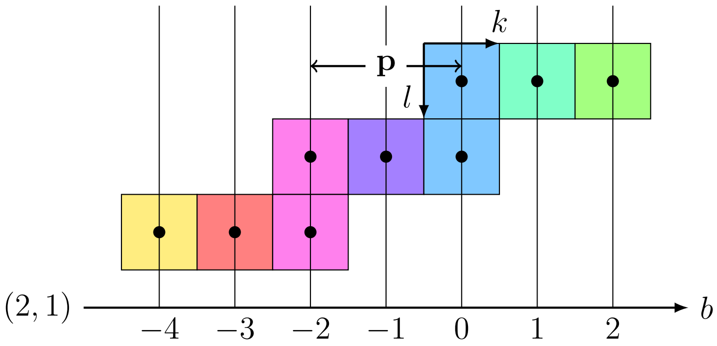
En reprenant l'idée originale de la section précédente, nous souhaitons exprimer la projection Mojette d'angle $(p,1)$ d'une image comme la somme de ses colonnes après un décalage sur les lignes. La figure 6.5 nous permet une visualisation intuitive de la méthode : en décalant la l^{e} ligne vers la gauche, la projection d'une image suivant un angle $(p,1)$ se réduit à la somme de ses colonnes ayant subi ce décalage.

Proposition 6.6. Soit $\boldsymbol{f}$ une image de taille $P\times Q$. Avec les notations précédentes,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{p,1}\boldsymbol{f}(x)&=\sum_{l=0}^{Q-1}x^{-pl}f_l(x) \qquad (6.9)\\ &=\begin{pmatrix}1 & x^{-p} & x^{-2p} & \cdots & x^{-(Q-1)p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0(x) & f_1(x) & \cdots & f_{Q-1}(x)\end{pmatrix}^{\top}.\end{aligned}$$



(a) Projection Mojette d'angle $(2, 1)$ d'une image de taille 3×3



(b) Calcul de la même projection en décalant les lignes de l'image

FIGURE 6.5 – Exemple de calcul de projection Mojette d'angle $(p, 1)$ en effectuant un décalage de p pixels sur chaque ligne de l'image

Démonstration. Soit une image f de taille $P \times Q$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{p,1} f(x) &= \sum_{b \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{l=0}^{Q-1} \sum_{k=0}^{P-1} f(k, l) \Delta(b - k + pl) \right] x^b \\
&= \sum_{l=0}^{Q-1} \sum_{k=0}^{P-1} f(k, l) x^{k-pl} \\
&= \sum_{l=0}^{Q-1} \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{P-1} f(k, l) x^k \right]}_{f_l(x)} x^{-pl} = \sum_{l=0}^{Q-1} x^{-pl} f_l(x).
\end{aligned}$$

□

Il est intéressant de noter qu'ici, contrairement à la section 6.2, aucune condition n'est exigée sur la taille de l'image.

6.3.1.2 Transformée Mojette pour un ensemble de projections $\{(p_i, 1)\}$

Nous considérons à présent un ensemble de projections d'angles discrets $\{(p_i, 1)\}$. Nous adoptons ici les mêmes notations que dans la section 6.2 en considérant une matrice de transformation agissant sur une image et dont la résultante est un vecteur de N projections correspondant chacune à l'angle $(p_i, 1)$.

En utilisant la proposition 6.6, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{M}_{p_0,1}f(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathcal{M}_{p_{N-1},1}f(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-p_0} & x^{-2p_0} & \cdots & x^{-(Q-1)p_0} \\ 1 & x^{-p_1} & x^{-2p_1} & \cdots & x^{-(Q-1)p_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x^{-p_{N-1}} & x^{-2p_{N-1}} & \cdots & x^{-(Q-1)p_{N-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{Q-1}(x) \end{pmatrix}. \quad (6.10)$$

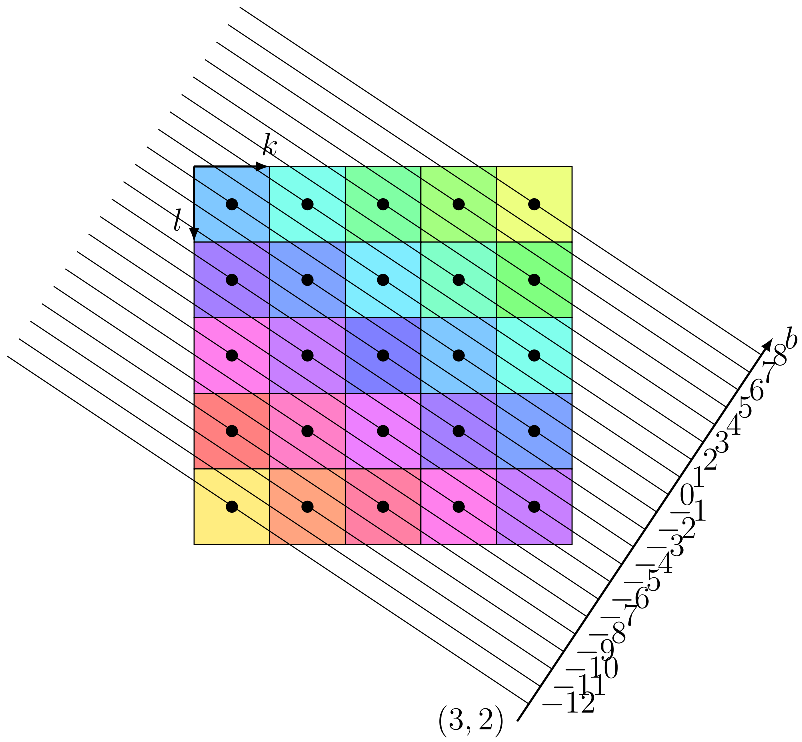
Notons ici une frappante similarité avec l'expression de la matrice de transformation FRT*. Même si ces deux transformées sont très proches, la FRT* étant une transformation périodique, il n'est pas aisé de retrouver une formulation unifiée comme entre les équations (6.5) et (6.10).

6.3.2 Projections Mojette sur des angles discrets (p, q)

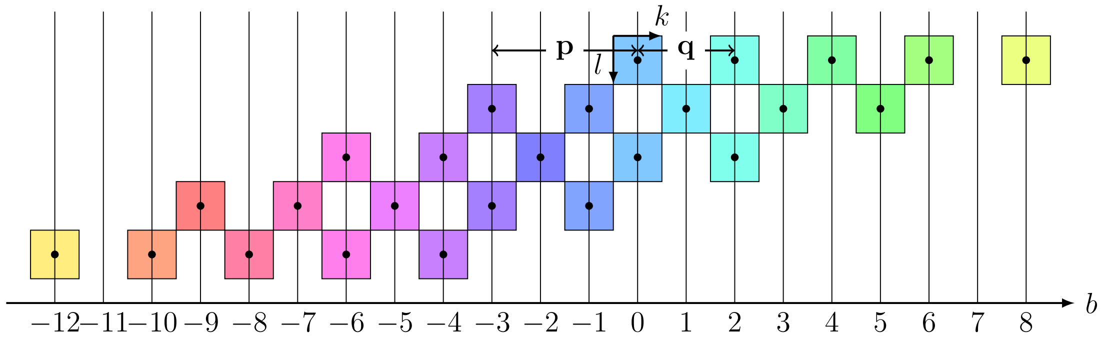
Nous nous intéressons ici au cas général de projections suivant un angle discret (p, q) avec $q \neq 0$. Contrairement au cas précédent avec des angles $(p, 1)$, nous avons besoin ici de sur-échantillonner les lignes de l'image d'un facteur q afin de pouvoir calculer les projections à partir de décalages sur les lignes, comme l'illustre la figure 6.7.

Nous pouvons alors calculer une projection Mojette d'angle (p, q) par l'équation :

$$\mathcal{M}_{p,q}\boldsymbol{f}(x) = \sum_{l=0}^{Q-1} x^{-pl} f_l(x^q). \quad (6.11)$$



(a) Projection Mojette d'angle $(3, 2)$ d'une image de taille 5×5



(b) Calcul de la même projection en sur-échantillonnant et en décalant les lignes de l'image

FIGURE 6.7 – Example de calcul de projection Mojette d'angle (p, q) en effectuant un sur-échantillonnage de facteur q puis un décalage de p pixels sur chaque ligne de l'image

Démonstration. Soit une image $\boldsymbol{f}$ de taille $P \times Q$,

$$
\begin{aligned}
\forall (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*,\ \mathcal{M}_{p,q}\boldsymbol{f}(x) &= \sum_{b \in \mathbb{Z}} \left[\sum_{l=0}^{Q-1} \sum_{k=0}^{P-1} f(k,l) \Delta(b - kq + pl) \right] x^b \\
&= \sum_{l=0}^{Q-1} \sum_{k=0}^{P-1} f(k,l) x^{kq-pl} \\
&= \sum_{l=0}^{Q-1} \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{P-1} f(k,l) x^{kq} \right]}_{f_l(x^q)} x^{-pl} \\
&= \sum_{l=0}^{Q-1} x^{-pl} f_l(x^q).
\end{aligned}
$$

□

L'équation (6.11) n'est pas directement transposable en système matriciel à cause de la composition de polynômes. Pour contourner ce problème, nous proposons un traitement des projections par blocs de taille $p \times q$ en utilisant la description de la transformée Mojette Shear-Stack que nous allons voir à présent.

6.3.3 Transformée Mojette Shear-Stack

La transformée Mojette Shear-Stack est une version de la transformée Mojette par blocs de taille (p, q) [100].

6.3.3.1 Définition

Au lieu d'associer un ensemble de projections à une dimension pour une image en deux dimensions, la transformée Mojette Shear-Stack transforme une image bidimensionnelle en un ensemble de projections bidimensionnelles. Ainsi, chaque pixel de l'image de coordonnées (k, l) est projeté en 2D sur un bin de coordonnées (κ, λ) tel que le vecteur $(k-\kappa, l-\lambda)$ soit colinéaire au vecteur (p, q) (donc orthogonal à $(q, -p)$) :

$$(k - \kappa, l - \lambda) \cdot (q, -p) = 0. \tag{6.12}$$

Afin d'obtenir un couple (κ, λ) unique, deux conventions ont été établies à utiliser au choix — $\kappa \in [0 \ldots |p-1|]$ ou $\lambda \in [0 \ldots q-1]$ — ce qui donne :

$$\begin{cases} \kappa = k \bmod |p| \\ \lambda = l - \frac{k-\kappa}{p} q \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \lambda = l \bmod q \\ \kappa = k - \frac{l-\lambda}{q} p. \end{cases} \tag{6.13}$$

La première convention est adaptée pour des directions de projections essentiellement horizontales $(p > q)$ et la deuxième est préférable pour des directions de projections essentiellement verticales $(p < q)$.

Cette transformée est équivalente à la transformée Mojette classique car on peut retrouver chaque bin de la projection classique $\mathcal{M}_{p,q} f(b)$ par la formule :

$$b = \kappa q - \lambda p. \tag{6.14}$$

En pratique, cette projection est très facile à calculer car elle équivaut à décaler les blocs $(|p|, q)$ de l'image et à les sommer. Cette opération est illustrée dans la figure 6.8.

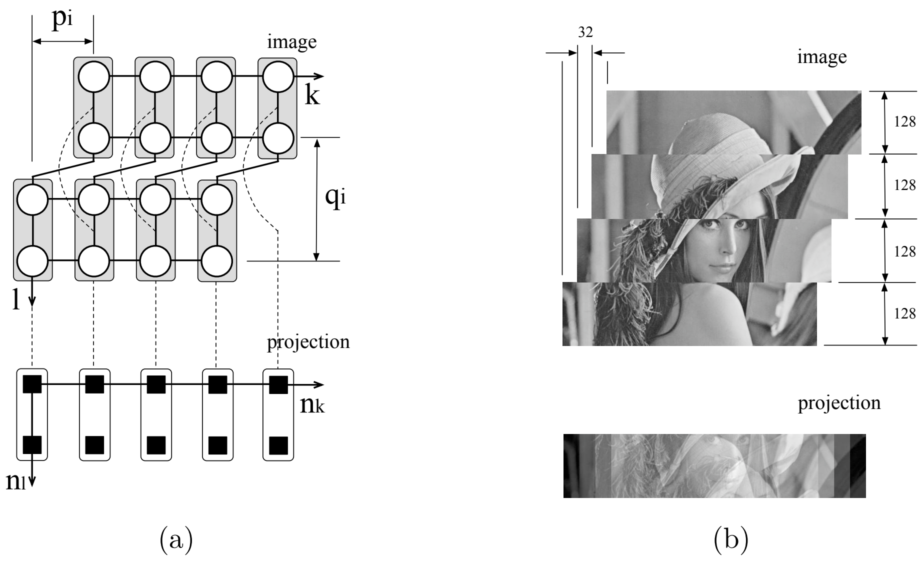


FIGURE 6.8 – (a) Schéma de la projection Mojette Shear-Stack d'angle (p, q) par décalages par blocs de lignes. (b) Exemple de la projection Mojette Shear-Stack de l'image Lena de taille 512×512 avec $(p, q) = (32, 128)$

6.3.3.2 Description algébrique avec de la transformée Mojette Shear-Stack

Nous pouvons exprimer la transformée Mojette Shear-stack d'une image $\boldsymbol{f}$ de taille $P \times Q$ par l'équation suivante :

$$\mathcal{M}\mathrm{SS}_{p,q}\boldsymbol{f}(\kappa,\lambda) = \sum_{\substack{l=0 \\ l \equiv \lambda \bmod q}}^{Q-1} \sum_{k=0}^{P-1} f(k,l)\Delta\left[(k-\kappa)q-(l-\lambda)p\right]. \tag{6.15}$$

En utilisant les notations établies tout au long du chapitre, nous identifions la transformée Mojette Shear-Stack d'angle discret (p,q) à un vecteur de q polynômes :

$$\mathcal{M}\mathrm{SS}_{p,q}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}\mathrm{SS}^{0}_{p,q}\boldsymbol{f}(x) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}\mathrm{SS}f(\kappa,0)x^{\kappa} \\ \vdots \\ \mathcal{M}\mathrm{SS}^{q-1}_{p,q}\boldsymbol{f}(x) = \sum_{\kappa\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}\mathrm{SS}f(\kappa,q-1)x^{\kappa} \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

En utilisant ce formalisme, nous pouvons exprimer la projection Mojette Shear-Stack sous forme matricielle comme ce qui suit.

Proposition 6.9. Soit $\boldsymbol{f}$ une image de taille $P \times Q$ représentée par un vecteur de Q lignes polynomiales. On a alors, pour $\lambda \in [0 \ldots q-1]$:

$$\mathcal{M}\mathrm{SS}^{\lambda}_{p,q}\boldsymbol{f}(x) = \sum_{\substack{l=0 \\ l \equiv \lambda \bmod q}}^{Q-1} x^{-\left\lfloor \frac{l}{q} \right\rfloor p} f_l(x). \tag{6.17}$$

Soit sous forme matricielle :

$$\mathcal{M}\mathrm{SS}_{p,q}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\Lambda}_{p,q} \times \boldsymbol{f}, \tag{6.18}$$

où $\boldsymbol{\Lambda}_{p,q}$ est une matrice de taille $q \times Q$ de la forme :

$$
\begin{array}{l}
\qquad\qquad \overleftrightarrow{\quad q \text{ termes} \quad} \\
\boldsymbol{\Lambda}_{p,q} = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & x^{-p} & 0 & \cdots & 0 & x^{-2p} & 0 & \cdots & 0 & x^{-3p} & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x^{-p} & 0 & \cdots & 0 & x^{-2p} & 0 & \cdots & 0 & x^{-3p} & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x^{-p} & 0 & \cdots & 0 & x^{-2p} & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & x^{-p} & 0 & \cdots & 0 & x^{-2p} & 0 & & \cdots
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{6.19}
$$

Démonstration. Soit f une image de taille $P \times Q$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}\mathrm{SS}_{p,q}\boldsymbol{f} &= \begin{pmatrix}
\sum\limits_{\kappa \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}\mathrm{SS}f(\kappa, 0)x^{\kappa} \\
\vdots \\
\sum_{\kappa \in \mathbb{Z}} \mathcal{M}\mathrm{SS}f(\kappa, q-1)x^{\kappa}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\sum\limits_{\kappa \in \mathbb{Z}} \sum\limits_{\substack{l=0 \\ l \equiv 0 \bmod q}}^{Q-1} \sum\limits_{k=0}^{P-1} f(k,l)\Delta\left[(k-\kappa)q - (l-\lambda)p\right] x^{\kappa} \\
\vdots \\
\sum\limits_{\kappa \in \mathbb{Z}} \sum\limits_{\substack{l=0 \\ l \equiv q-1 \bmod q}}^{Q-1} \sum\limits_{k=0}^{P-1} f(k,l)\Delta\left[(k-\kappa)q - (l-\lambda)p\right] x^{\kappa}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\sum\limits_{\substack{l=0 \\ l \equiv 0 \bmod q}}^{Q-1} \sum\limits_{k=0}^{P-1} f(k,l)x^{k - \frac{l-\lambda}{q}p} \\
\vdots \\
\sum\limits_{\substack{l=0 \\ l \equiv q-1 \bmod q}}^{Q-1} \sum\limits_{k=0}^{P-1} f(k,l)x^{k - \frac{l-\lambda}{q}p}
\end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix}
\sum\limits_{\substack{l=0 \\ l \equiv 0 \bmod q}}^{Q-1} \sum\limits_{k=0}^{P-1} f(k,l)x^{k}x^{-\frac{l-\lambda}{q}p} \\
\vdots \\
\sum\limits_{\kappa \in \mathbb{Z}} \sum\limits_{\substack{l=0 \\ l \equiv q-1 \bmod q}}^{Q-1} \sum\limits_{k=0}^{P-1} f(k,l)x^{k}x^{-\frac{l-\lambda}{q}p}
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{M}\mathrm{SS}_{p,q}\boldsymbol{f} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\substack{l=0 \\ l\equiv 0 \bmod q}}^{Q-1} f_l(x)x^{-\frac{l-\lambda}{q}p} \\ \vdots \\ \sum\limits_{\substack{l=0 \\ l\equiv q-1 \bmod q}}^{Q-1} f_l(x)x^{-\frac{l-\lambda}{q}p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{\substack{l=0 \\ l\equiv 0 \bmod q}}^{Q-1} f_l(x)x^{-\lfloor\frac{l}{q}\rfloor p} \\ \vdots \\ \sum\limits_{\substack{l=0 \\ l\equiv q-1 \bmod q}}^{Q-1} f_l(x)x^{-\lfloor\frac{l}{q}\rfloor p} \end{pmatrix}.$$

□

La matrice $\mathbf{\Lambda}_{p,q}$ définie en (6.19) n'est pas une matrice de Vandermonde. Nous ne pouvons donc pas utiliser l'algorithme 6.3 pour la reconstruction à partir de ce système. Par contre, cette description reste cohérente avec le critère de Katz, car chaque direction de projection (p, q) produit ainsi q lignes de projections indépendantes. La matrice issue de la compilation de N directions de projection (p_i, q_i) produira ainsi $\sum_{i=0}^{N-1} q_i$ lignes.

Nous proposons de combiner ces q projections de manière à ce que la matrice résultante soit une matrice de Vandermonde. La méthode consiste à combiner de q manières indépendantes ces q lignes, de façon à conserver le rang de $\mathbf{\Lambda}_{p,q}$ après transformation :

$$\mathbf{S}_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & a_0 x^{-\frac{p}{q}} & a_0^2 x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & a_0^{q-1} x^{-(q-1)\frac{p}{q}} \\ \vdots & & & & \\ 1 & a_{q-1} x^{-\frac{p}{q}} & a_{q-1}^2 x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & a_{q-1}^{q-1} x^{-(q-1)\frac{p}{q}} \end{pmatrix}, \tag{6.20}$$

et en multipliant $\mathbf{\Lambda}_{p,q}$ à gauche par $\mathbf{S}_{p,q}$ on obtient :

$$\mathbf{V}_{p,q} = \mathbf{S}_{p,q} \times \mathbf{\Lambda}_{p,q} \tag{6.21}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_0 x^{-\frac{p}{q}} & a_0^2 x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & a_0^{q-1} x^{-(q-1)\frac{p}{q}} & x^{-p} & a_0 x^{-(q+1)\frac{p}{q}} & \cdots \\ \vdots & & & & & & & \\ 1 & a_{q-1} x^{-\frac{p}{q}} & a_{q-1}^2 x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & a_{q-1}^{q-1} x^{-(q-1)\frac{p}{q}} & x^{-p} & a_{q-1} x^{-(q+1)\frac{p}{q}} & \cdots \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

Nous déduisons de l'équation (6.22) les conditions sur les a_i pour que la matrice $\mathbf{V}_{p,q}$ soit une matrice de Vandermonde. Il faut premièrement que les a_i soient des racines q^e de l'unité pour que périodiquement $a_i^q = 1$. Enfin pour avoir $\mathrm{rg}(\mathbf{V}_{p,q}) = \mathrm{rg}(\boldsymbol{\Lambda}_{p,q})$, il faut que les a_i soient tous différents. Ces deux conditions sont respectées en posant :

$$a_j = \mathrm{e}^{\frac{2ij\pi}{q}}, \tag{6.23}$$

où i désigne ici le complexe imaginaire pur tel que $i^2 = -1$.

Nous en déduisons donc :

$$\mathbf{S}_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-\frac{p}{q}} & x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & x^{-(q-1)\frac{p}{q}} \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{q}} x^{-\frac{p}{q}} & \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{q}} x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{2i(q-1)\pi}{q}} x^{-(q-1)\frac{p}{q}} \\ \vdots & & & & \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2i(q-1)\pi}{q}} x^{-\frac{p}{q}} & \mathrm{e}^{\frac{4i(q-1)\pi}{q}} x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & \mathrm{e}^{\frac{2i(q-1)^2\pi}{q}} x^{-(q-1)\frac{p}{q}} \end{pmatrix} \tag{6.24}$$

et

$$\mathbf{V}_{p,q} = \begin{pmatrix} 1 & x^{-\frac{p}{q}} & x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & x^{-p} & x^{-(q+1)\frac{p}{q}} & \cdots \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{q}} x^{-\frac{p}{q}} & \mathrm{e}^{\frac{4i\pi}{q}} x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & x^{-p} & \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{q}} x^{-(q+1)\frac{p}{q}} & \cdots \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & \mathrm{e}^{\frac{2i(q-1)\pi}{q}} x^{-\frac{p}{q}} & \mathrm{e}^{\frac{4i(q-1)\pi}{q}} x^{-2\frac{p}{q}} & \cdots & x^{-p} & \mathrm{e}^{\frac{2i(q-1)\pi}{q}} x^{-(q+1)\frac{p}{q}} & \cdots \end{pmatrix}. \tag{6.25}$$

Le système $\mathbf{V}_{p,q}$ peut maintenant être utilisé pour obtenir des projections « de Vandermonde » ainsi que pour reconstruire une image à partir de ces projections. Lorsque nous avons des projections Mojette classique ou Shear-Stack, il suffit de leur appliquer la matrice $\mathbf{S}_{p,q}$ pour ensuite pouvoir reconstruire l'image initiale à partir de l'algorithme 6.3.

De même, remarquons que la matrice $\mathbf{S}_{p,q}$ est elle-même une matrice de Vandermonde. Pour transcrire une projection Mojette d'angle discret (p, q) dans le système de Vandermonde, il suffit donc de leur appliquer l'algorithme 6.4.

Enfin nous pouvons retrouver les projections Mojette Shear-Stack à partir des données obtenues en appliquant $\mathbf{V}_{p,q}$ directement sur l'image en utilisant l'algorithme 6.3 pour inverser $\mathbf{S}_{p,q}$.

6.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un cadre algébrique pour décrire l'espace image et l'espace des projections Mojette et FRT. Ainsi, chaque ligne de l'image est modélisée par un vecteur de polynômes. Au sein de chaque polynôme, chacun des monômes représente un pixel distinct, dont la position horizontale sur la ligne est donnée par le degré du monôme et dont la valeur est donnée par le coefficient du monôme. Le même formalisme est appliqué pour décrire l'espace de projection : chacune des projections discrètes est représentée par un polynôme dont chaque monôme correspond à un bin. Dans ce formalisme, la matrice de projection est une matrice de Vandermonde.

Après avoir présenté la théorie développée par N. Normand, I. Svalbe *et al.* pour la FRT [125], nous nous attachons à définir plus formellement les structures mathématiques par des anneaux de polynômes quotients. Nous voyons en particulier que la condition de somme nulle pour toutes les lignes de l'image de [125] ainsi que le caractère périodique de l'image et des projections FRT se traduit par une condition unique sur l'anneau des polynômes quotient. Cette représentation est plus générale et relaxe la contrainte forte de [125] sur la somme des lignes de l'image.

Ensuite, nous nous sommes attachés à décrire la transformée Mojette, non périodique, dans le même formalisme qu'en FRT, mais dans l'anneau des polynômes tout entier. Si cette transposition est triviale pour les angles discrets de type $(p, 1)$, elle l'est beaucoup moins pour le cas général (p, q). En passant par la transformée Mojette Shear-Stack, chaque projection Mojette d'angle discret (p, q) est décomposée en q sous-projections, que nous savons ensuite traiter. La matrice de projection Mojette résultante est encore une matrice de Vandermonde.

Enfin, disposant d'une description par matrice de Vandermonde pour la FRT et la transformée Mojette, nous avons proposé un algorithme de projection/reconstruction efficace. Cet algorithme est basé sur une méthode classique de résolution de systèmes de Vandermonde. Les opérations usuelles dans le corps des réels sont donc remplacées par leur équivalent polynomial dont la mise en œuvre sur des images se réduit à des opérations de filtrage.

L'ensemble de ces avancées théoriques ont plusieurs visées applicatives qu'il faudra étudier. Tout d'abord, la manipulation des images et des projections ligne par ligne permettrait de paralléliser la reconstruction tomographique et donc d'en améliorer la performance. De plus, le formalisme algébrique présenté ici pourrait être utile à la caractérisation des fantômes pour les transformées Mojette et FRT. En effet, toute sous-matrice carrée d'une matrice de VANDERMONDE est inversible. Cette caractéristique est déjà largement utilisée dans les codes correcteurs d'erreurs comme REED-SOLOMON car elle permet de récupérer l'information perdue à partir d'une information partielle suffisante. Dans notre cas, cela implique de pouvoir reconstruire une image à partir d'une connaissance *a priori* d'une partie de celle-ci et d'un ensemble insuffisant de projections discrètes.

Troisième partie

Imagerie quantitative et projet QuantiCardi

Introduction de la troisième partie

Cette thèse a été réalisée à mi-temps au sein de l'entreprise Keosys dans le cadre du développement d'une application de quantification absolue de la perfusion myocardique en tomographie à émission de positons.

Cette troisième et dernière partie présente nos contributions industrielles ainsi que l'application des développements théoriques.

Chapitre 7

Quantification de la perfusion myocardique en TEP en routine clinique

Dans ce chapitre, nous développons une application des travaux présentés précédemment dans le contexte de la quantification de la perfusion myocardique en tomographie par émission de positons.

Sommaire

Dans ce chapitre, nous développons une application des travaux présentés précedemment. Le problème clinique auquel nous sommes confrontés est la détection des maladies coronariennes. Ces maladies peuvent être diagnostiquées efficacement en observant la perfusion myocardique du ventricule gauche du cœur, c'est-à-dire le débit sanguin irriguant le muscle du cœur.

Nous allons dans un premier temps effectuer quelques brefs rappels d'anatomie afin de situer le problème industriel de quantification dans le contexte médical. Ensuite, nous présenterons la mise en place d'une solution industrielle.

7.1 Contexte clinique

Avant de présenter l'application technologique, il nous semble primordial de placer le contexte médical de notre problématique industrielle.

7.1.1 Anatomie du cœur et circulation sanguine

Le cœur est un organe creux qui agit comme une pompe au centre du système circulatoire. Les artères et les veines principales y sont directement connectées.

La figure 7.1 [1] propose une représentation schématique en coupe frontale du cœur. Celui-ci est divisé en une partie droite et une partie gauche, séparées par le septum. Chacune des parties comporte deux cavités : une oreillette et un ventricule, qui sont séparés par une valve n'autorisant la circulation que dans un sens. Ainsi, le sang s'écoule toujours des oreillettes aux ventricules. En se contractant, les ventricules propulsent le sang dans les artères.

Plus précisément, le sang en provenance des veines pulmonaires gauches — riche en oxygène — entre dans l'oreillette gauche et passe dans le ventricule gauche (VG) *via* la valve mitrale avant d'être éjecté dans l'aorte, qui fournit alors du sang fraîchement oxygéné à notre corps.

Le sang en provenance de la veine cave — pauvre en oxygène — entre dans l'oreillette droite et passe dans le ventricule droit (VD) *via* la valve tricuspide, avant d'être éjecté vers les poumons en empruntant les artères pulmonaires.

1. http://www.fedecardio.org/votre-coeur/anatomie/fonctionnement-du-coeur

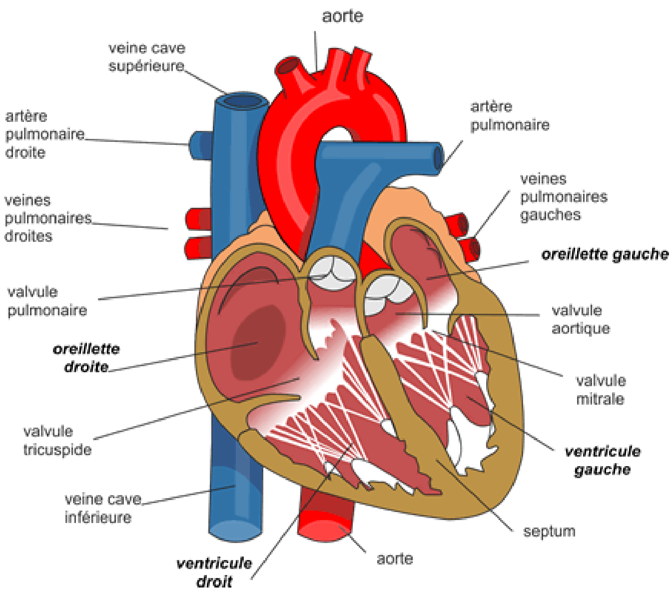


FIGURE 7.1 – Représentation schématique en coupe frontale du cœur (ressource de la fédération française de cardiologie)

La fonction contractile cardiaque est assurée par un muscle constituant la paroi du cœur, le myocarde. Ce muscle est entouré de l'endocarde sur la paroi interne et de l'épicarde sur la paroi externe. Comme tout muscle, le myocarde a besoin d'être irrigué en sang (ou *perfusé*).

Premières dérivations à l'entrée de l'aorte, les artères coronaires assurent la perfusion du myocarde. Nous pouvons les visualiser sur le schéma de la figure 7.2 [2].

7.1.2 Maladies coronariennes

D'après l'Organisation mondiale de la santé, la maladie coronarienne est la principale cause de décès dans le monde en 2012 et surtout dans les pays à fort revenu [142].

Également appelée *cardiopathie ischémique*, cette maladie des artères coronaires est caractérisée par le développement progressif de plaques athéromateuses sur leur paroi interne. L'accumulation de ces plaques obstrue peu à peu les artères

2. « Coronaire » par PATRICK J. LYNCH, illustrateur médical. Sous licence CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coronaire.png

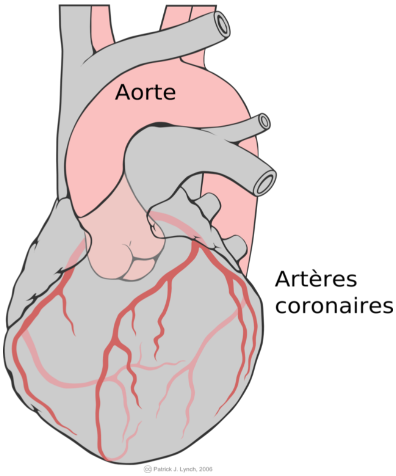


FIGURE 7.2 – Artères coronaires, sous licence Creative Commons

coronaires et réduit le débit sanguin. Cette réduction de débit a pour conséquence de réduire la perfusion du myocarde. Ainsi, les zones du myocarde hypoperfusées ne reçoivent pas suffisamment d'oxygène par rapport à leurs besoins, on parle alors d'*ischémie du myocarde* [153].

Depuis plusieurs décennies, l'examen de référence pour la détection de maladie coronarienne est l'angiographie coronarienne, consistant à injecter un produit de contraste directement dans les artères en question à l'aide d'un cathéter et à effectuer une radiographie pour visualiser les voies sanguines. Cet examen est invasif et est progressivement remplacé par la coronarographie par tomodensitométrie, technique non invasive mais plus irradiante [1]. Cependant, ces examens anatomiques permettent de visualiser l'état des artères, mais pas le débit sanguin. Il est donc difficile d'établir le lien entre une mesure de réduction d'artère coronaire et le stade et l'évolution de la maladie à travers des indices prédictifs précis. Pour ces raisons, il est donc préférable de s'intéresser aux signes cliniques de la maladie coronarienne [153].

Les défauts de perfusion du myocarde entraînent une succession d'effets et de signes cliniques de gravité croissante, appelée *cascade ischémique*. Ainsi au fur et à mesure que la perfusion myocardique diminue, on observe successivement :

— une hypo-perfusion régionale du myocarde ;

— des anomalies métaboliques ;

— des troubles de la contractilité du ventricule gauche, d'abord la fonction *diastolique* qui est la capacité du VG à se détendre donc à se remplir, puis la fonction *systolique* qui est la capacité du VG à se contracter donc à éjecter le sang vers l'aorte ;

— des troubles de l'activité électrique visibles à l'électrocardiogramme ;

— l'angine de poitrine ou *angor*, caractérisée par une douleur thoracique.

Chacun des signes cliniques de la cascade ischémique peut faire l'objet d'un diagnostic. En particulier, le diagnostic de la perfusion myocardique permet de détecter l'ischémie à son stade le plus précoce. Il peut être vu comme une alternative à la coronarographie mais chacune de ces pratiques possède avantages et inconvénient et font donc l'objet d'indications précises [117, 157].

7.2 Imagerie de la perfusion myocardique en médecine nucléaire

L'examen de la perfusion myocardique est traditionnellement du domaine de la médecine nucléaire [3]. Son principe est d'injecter un radiopharmaceutique qui se diffuse dans le sang. Les modalités d'imagerie de médecine nucléaire, tomographie à émission monophotonique (TEMP) ou tomographie à émission de positons (TEP) permettent d'imager la distribution tridimensionnelle de ce radiopharmaceutique à la surface du myocarde. En supposant une certaine linéarité entre la concentration spatiale du radiopharmaceutique et la perfusion myocardique, les images obtenues sont alors le reflet de la perfusion en tout point de l'espace.

Cet examen est réalisé en deux phases : une phase au repos et une phase à l'effort pour effectuer le diagnostic. En effet, la perfusion globale étant moins élevée au repos qu'à l'effort, certains défauts de perfusion ne sont visibles qu'à l'effort. De tels défauts de perfusion sont dits *réversibles*. D'autres défauts *non-réversibles* sont visibles à la fois à l'effort et au repos. Cette classification est très importante pour la prise en charge thérapeutique.

3. Des tentatives d'imagerie de la perfusion myocardique à l'IRM existent mais aucune ne se retrouve aujourd'hui en routine clinique [109].

7.2.1 TEMP : quantification relative

La plupart du temps ces examens sont réalisés en TEMP, pour son faible coût et l'accessibilité des équipements et radiopharmaceutiques. Le patient est alors injecté de ^{201}Tl ou ^{99m}Tc-mibi.

Les images produites dans le cas de l'imagerie de la perfusion myocardique en TEMP ne fournissent pas d'information quantitative, c'est-à-dire que les conditions physiques d'acquisition rendent difficile d'établir avec une précision suffisante une relation entre la concentration radioactive mesurée et le débit myocardique. Cependant, même sans information quantitative, les variations de concentration radioactive mesurées dans le myocarde permettent d'établir un diagnostic.

Ainsi, l'hypothèse fondamentale en TEMP est que la zone d'intensité maximale dans l'image correspond à une zone saine. En normalisant toute l'image par le maximum d'intensité, on obtient une cartographie relative, exprimant en chaque point de l'espace le ratio de la perfusion avec une perfusion « normale ». On appelle ce processus la *quantification relative* de la perfusion myocardique.

7.2.2 TEP : quantification absolue

La TEP est une modalité qui est en compétition avec la TEMP depuis les débuts de la médecine nucléaire. Bien que la TEMP ait des avantages pratiques, les images produites par la TEP ont souvent une meilleure résolution spatiale, une meilleure quantification du fait de la sensibilité plus faible au phénomène d'atténuation et, le cas échéant, une meilleure résolution temporelle. Ces qualités rendent le diagnostic plus fiable pour les patients en surpoids pour lesquels l'atténuation est importante.

En outre, la TEP permet d'obtenir une *quantification absolue* de la perfusion myocardique, c'est-à-dire de mesurer la valeur du débit sanguin à partir des images acquises et non un rapport comme en TEMP. Cette information est capitale en cas d'hypo-perfusion dans la globalité du myocarde. En effet, l'information fournie par la TEMP ne permet pas de détecter ce défaut pourtant de gravité importante car la perfusion relative reste alors élevée partout [108].

7.3 Les étapes de la quantification

La quantification de la perfusion myocardique en routine clinique répond à des exigences de présentation et de traitements normalisés permettant de faciliter la comparaison inter-patient et de réduire les variabilités lors des procédures [89, 90].

La figure 7.3 dénote la chaîne de traitements nécessaires pour la quantification de la perfusion en routine clinique.

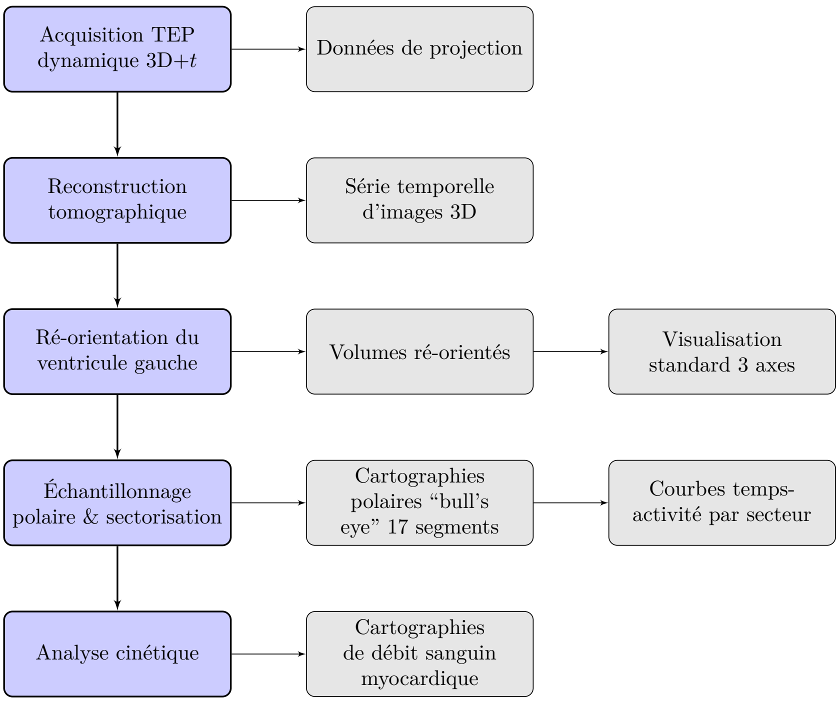


FIGURE 7.3 – Chaîne de traitements complète pour la quantification absolue automatisée de la perfusion myocardique en TEP

7.4 Ré-orientation du ventricule gauche

La ré-orientation du ventricule gauche se décline en deux étapes successives : une première étape de segmentation du myocarde et une étape consistant à déterminer la direction des axes principaux du ventricule gauche.

7.4.1 Segmentation du ventricule gauche

La première étape menant à la quantification finale consiste à segmenter le myocarde, c'est-à-dire l'isoler dans le volume entier acquis à la TEP. Plusieurs pistes ont été envisagées d'après l'étude de l'état de l'art.

D'une part les approches basées sur les contours consistent à ajuster un (ou deux dans le cas du myocarde) contour à notre forme qui va se déformer de manière itérative pour se plaquer finalement sur l'objet à segmenter. Ces approches utilisent un modèle variationnel pour diriger la direction et l'amplitude de déformation. Nous pouvons citer parmi les méthodes rencontrées les *snakes*, *contours actifs* et *surfaces de niveaux* [26]. Ces méthodes très efficaces pour des modalités telles que l'IRM ou la TDM le sont moins pour les modalités de médecine nucléaire qui souffrent d'une mauvaise résolution spatiale et d'un bruit important. De plus, l'hyperfixation du radiopharmaceutique dans les régions hépatiques ou gastriques empêche la bonne convergence du modèle. Nous avons donc opté pour une autre approche.

Les approches basées sur les régions consistent à regrouper ensemble des voxels qui partagent des caractéristiques communes. De nombreuses méthodes différentes existent encore ici, nous pouvons citer la croissance de région, le clustering, le seuillage adaptatif ou non, etc. Nous pouvons également choisir ou non d'inclure des aprioris de forme ou de position pour aider l'algorithme à effectuer une segmentation automatique efficace. Cependant en mettant trop l'accent dans notre modèle sur la forme ellipsoïdale du ventricule gauche, la segmentation peut échouer à cause des régions d'hypo-perfusions, régions mêmes que nous voulons identifier précisément pour le diagnostic final.

En nous basant sur l'état de l'art, nous avons choisi d'appliquer une approche région morphologique en utilisant des aprioris de volume et de position du ventricule gauche [62, 63]. La première étape de la segmentation consiste à effectuer un seuillage à la moitié de l'intensité mesurée dans l'image. Ce seuillage permet d'isoler une partie du myocarde et éventuellement des hyperfixations résiduelles. Les voxels retenus sont ensuite regroupés par composantes connexes, et une série d'érosions et de dilatations morphologiques permettent de détacher les structures avoisinantes hyperfixantes qui ne correspondent pas au ventricule gauche.

Ces étapes sont résumées dans l'algorithme 7.4.

Algorithme 7.4: Algorithme de segmentation du ventricule gauche [62]

Entrée : I : Image volumique de taille $X \times Y \times Z$
Entrée : B : Élément structurant
Sortie : M : Masque binaire
`/* Seuillage */`
$I_{max} \leftarrow \max(I)$
pour chaque $(i, j, k) \in [1 \ldots X] \times [1 \ldots Y] \times [1 \ldots Z]$ **faire**
  si $I(i, j, k) \geq \frac{I_{max}}{2}$ **alors** $M(i, j, k) \leftarrow 1$ **sinon** $M(i, j, l) \leftarrow 0$
fin
`/* Étiquetage des composantes connexes. */`
$L \leftarrow$ `ComposantesConnexes(`M`)` `/* Identification du ventricule gauche */`
$labelVG \leftarrow$ `IdentificationLabelVG(`L`)`
tant que `Volume(`$L(label_{\mathrm{VG}})$`)` $\geq V_{\max}$ **faire**
  `Erosion(`$L(label_{\mathrm{VG}})$,B`)`
fin

7.4.2 Modélisation ellipsoïdale

Une fois le ventricule gauche segmenté, nous devons pouvoir le représenter selon les vues standard (vues trois axes et cartes polaires). Afin de générer ces nouvelles vues, il nous faut estimer les axes principaux du ventricule gauche qui est alors modélisé comme un ellipsoïde [29, 42, 61, 62, 104].

La première étape consiste à échantillonner le volume segmenté de manière à transformer le volume en surface (courbe de dimension 3) puis à transformer cette surface en série de points. Un échantillonnage sphérique à partir du barycentre du volume est réalisé avec un pas angulaire constant. Sur chaque rayon, seuls les maxima sont retenus et définissent la surface myocardique médiane (entre l'épicarde et l'endocarde).

La seconde étape consiste à ajuster une surface ellipsoïdale au nuage de points obtenus.

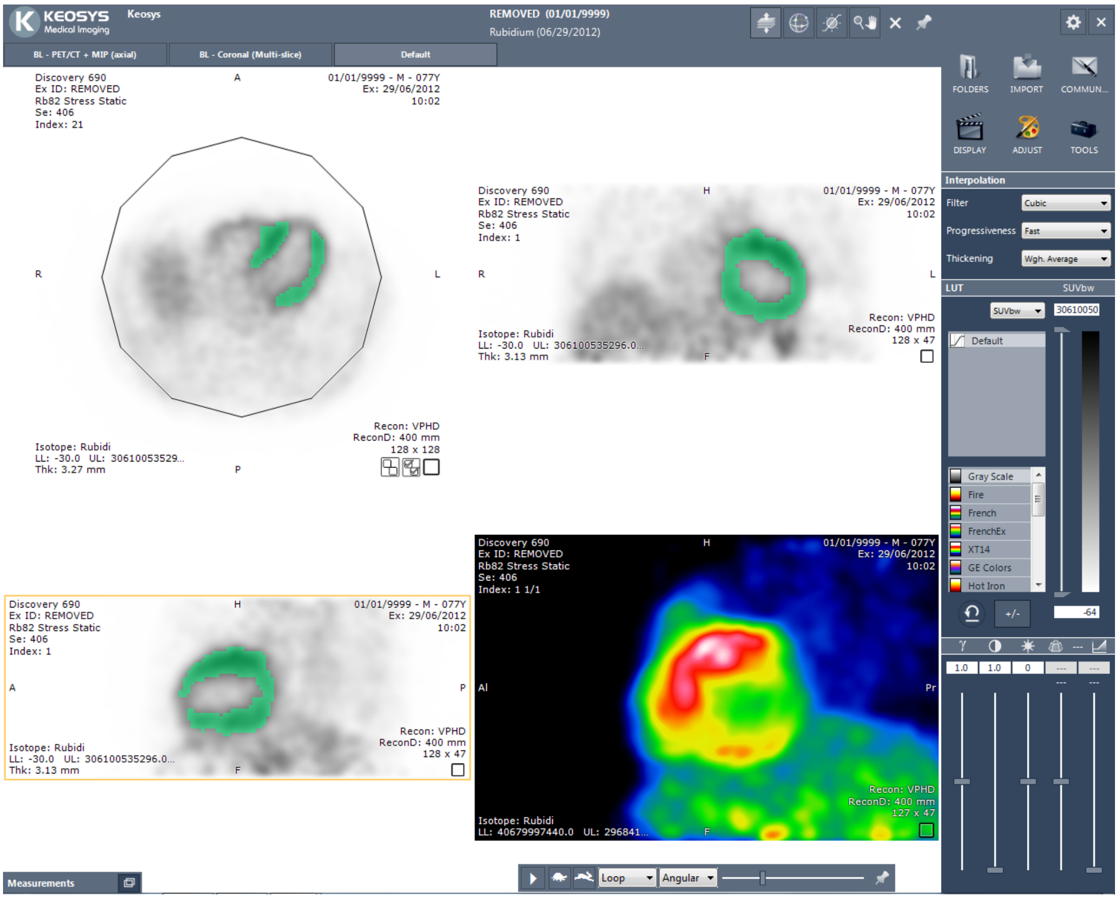


FIGURE 7.5 – Segmentation automatique du ventricule gauche : capture d'écran du module réalisé dans le logiciel commercial de Keosys

7.4.2.1 Ajustement d'un ellipsoïde aux données

Pour décrire ce processus, intéressons-nous à l'expression algébrique d'une telle surface quadratique. Dans un repère cartésien, un ellipsoïde possède une équation du type :

$$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \mathbf{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{x} + c = 0, \tag{7.1}$$

où $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1 & A_4 & A_5 \\ A_4 & A_2 & A_6 \\ A_5 & A_6 & A_3 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique réelle définie-positive, $b = \begin{pmatrix} A_7 \\ A_8 \\ A_9 \end{pmatrix}$ et $c = -1$ est une constante fixée de manière arbitraire mais non nulle.

Il existe plusieurs moyens d'ajuster un nuage de points à une surface quadratique dont l'expression est définie par l'équation (7.1). Un panorama de ces méthodes est présenté dans [3]. En particulier, la méthode intuitive serait de réduire la distance géométrique euclidienne entre la surface quadratique estimée et le nuage de points. Cependant cette technique est lourde et nous utilisons la distance algébrique comme approximation de la distance euclidienne. La distance algébrique entre un nuage de points $\mathcal{P} = \left(\boldsymbol{x_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{x_n} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \right)$ et une surface quadratique $\mathcal{S}\colon \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\boldsymbol{x}) = 0 \,\}$ est définie par [3] :

$$d(\mathcal{P}, \mathcal{S}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} f(\boldsymbol{x_i})^2}. \tag{7.2}$$

Ainsi le problème se réduit à trouver les paramètres $A_1, \ldots, A_9$ tels que $d(\mathcal{P}, \mathcal{S})$ soit minimal. En dérivant l'expression (7.2) par rapport aux A_i, nous obtenons les équations normales du système, qui équivaut alors à :

$$\mathbf{S}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{d}, \tag{7.3}$$

où $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_9 \end{pmatrix}$ est l'inconnue, $\mathbf{S}$ la matrice symétrique :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix}
{x_i}^2{x_i}^2 & {x_i}^2{y_i}^2 & {x_i}^2{z_i}^2 & 2{x_i}^3y_i & 2{x_i}^3z_i & 2{x_i}^2y_iz_i & {x_i}^2x_i & {x_i}^2y_i & {x_i}^2z_i \\
 & {y_i}^2{y_i}^2 & {y_i}^2{z_i}^2 & 2x_i{y_i}^3 & 2x_i{y_i}^2z_i & 2{y_i}^3z_i & x_i{y_i}^2 & {y_i}^2y_i & {y_i}^2z_i \\
 & & {z_i}^2{z_i}^2 & 2x_iy_i{z_i}^2 & 2x_i{z_i}^3 & 2y_i{z_i}^3 & x_i{z_i}^2 & y_i{z_i}^2 & {z_i}^2z_i \\
 & & & 4{x_i}^2{y_i}^2 & 4{x_i}^2y_iz_i & 4x_i{y_i}^2z_i & 2{x_i}^2y_i & 2x_i{y_i}^2 & 2x_iy_iz_i \\
 & & & & 4{x_i}^2{z_i}^2 & 4x_iy_i{z_i}^2 & 2{x_i}^2z_i & 2x_iy_iz_i & 2x_i{z_i}^2 \\
 & & & & & 4{y_i}^2{z_i}^2 & 2x_iy_iz_i & 2{y_i}^2z_i & 2y_i{z_i}^2 \\
 & & & & & & x_ix_i & x_iy_i & x_iz_i \\
 & & & & & & & y_iy_i & y_iz_i \\
 & & & & & & & & z_iz_i
\end{pmatrix} \tag{7.4}$$

et

$$\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} x_i x_i & y_i y_i & z_i z_i & 2x_i y_i & 2x_i z_i & 2y_i z_i & \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} z_i & \sum_{i=1}^{n} z_i \end{pmatrix}^{\top} \tag{7.5}$$

en adoptant la convention de sommation d'EINSTEIN : $a_i b_i = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j$.

La matrice $\mathbf{S}$ étant de taille raisonnable et symétrique, nous résolvons le système (7.3) en opérant une transformation QR [131].

7.4.2.2 Calcul des directions principales

En ayant déterminé les matrices $\mathbf{A}$ et $\boldsymbol{b}$ de l'équation (7.1), il est aisé de déterminer le centre, les directions principales et les rayons de l'ellipsoïde en la réduisant son équation sous la forme :

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v})^{\top} \mathbf{A}' (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{v}) = 1. \tag{7.6}$$

Sous cette forme, le vecteur $\boldsymbol{v}$ correspond aux coordonnées du centre de l'ellipsoïde, les valeurs propres de $\mathbf{A}'$ correspondent à l'inverse du carré des diamètres de l'ellipsoïde et les vecteurs propres associés aux valeurs propres forment une base orthonormée qui définit les directions principales, c'est-à-dire la direction des grands, moyens et petit axes de l'ellipsoïde.

La dernière étape consiste donc à diagonaliser la matrice $\mathbf{A}'$ dans une base de vecteurs propres orthonormale, dont l'existence est justifiée par le fait que $\mathbf{A}'$ est une matrice symétrique réelle :

$$\mathbf{A}' = \mathbf{P}^{\top} \begin{pmatrix} \frac{1}{{r_1}^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{{r_3}^2} \end{pmatrix} \mathbf{P} \tag{7.7}$$

où r_1, r_2, et r_3 sont respectivement le grand, moyen et petit demi-axes de l'ellipsoïde. $\mathbf{P}$ est la matrice de passage des coordonnées cartésiennes à la base propre de l'ellipsoïde. Cette matrice sert alors de matrice de rotation pour ré-orienter le ventricule gauche.

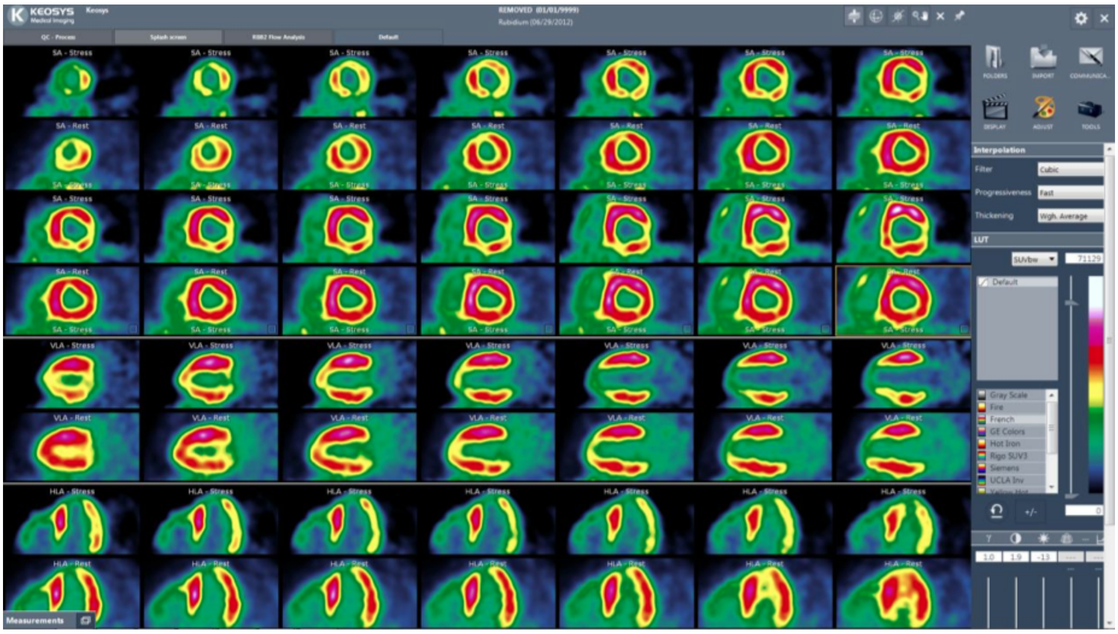


FIGURE 7.6 – Vues standard *petit axe* (quatre premières lignes), *grand axe vertical* (cinquième et sixième lignes) et *grand axe horizontal* (deux dernières lignes) : capture d'écran du module logiciel réalisé dans le logiciel commercial de Keosys

Les cartes polaires sont réalisées en échantillonnant la surface de l'ellipsoïde. Le centre de la carte polaire correspond aux coupes apicales et les couronnes extérieures aux coupes basales.

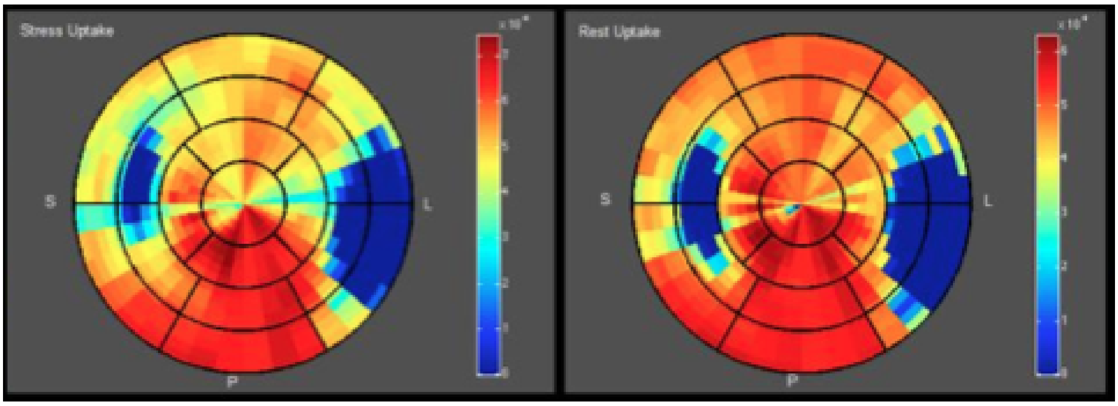


FIGURE 7.7 – Cartes polaires de la concentration relative en ^{82}Rb au repos et à l'effort réalisée sous Matlab en cours d'intégration dans le logiciel de Keosys

7.5 Analyse cinétique

La segmentation du ventricule gauche à tous les temps de la série dynamique permet d'obtenir pour chaque région du myocarde des courbes temps-activité, c'est-à-dire l'évolution temporelle de la concentration de ^{82}Rb. Grâce à la modélisation des processus de captation du radiopharmaceutique dans le myocarde et de diffusion dans le sang, nous sommes en mesure de relier les courbes temps-activité données par les mesures TEP dynamiques au débit sanguin. Il existe plusieurs outils pour réaliser cette tâche. Nous avons choisi d'opter ici pour une modélisation cinétique à l'aide de compartiments fonctionnels. La quantification du débit sanguin est réalisée en deux étapes : la détermination des constantes de captation et de clairance, puis la quantification du débit sanguin à partir de ces derniers.

7.5.1 Modèles compartimentaux

Différents modèles cinétiques ont été proposés pour quantifier le débit sanguin au ^{82}Rb [37, 38, 88, 176]. Nous en citerons deux : le modèle à trois compartiments (deux compartiments de tissus et un compartiment sanguin) et le modèle à deux compartiments (un compartiment de tissu et un compartiment sanguin).

Le modèle à trois compartiments modélise avec précision les processus physiologiques et mécaniques dans le corps humain [88, 93]. Ainsi, comme nous pouvons le voir dans la figure 7.8, les trois compartiments sont le sang artériel, l'espace interstitiel — entre les cellules — et l'espace intracellulaire à l'intérieur de la membrane cellulaire.

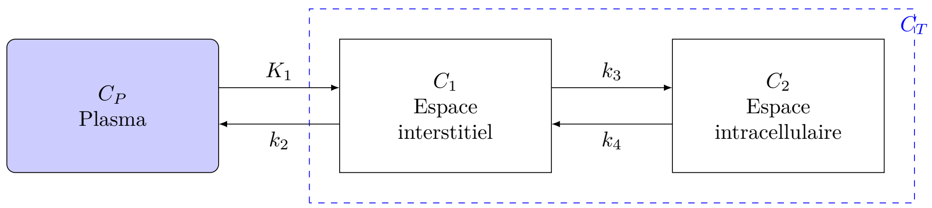


FIGURE 7.8 – Modèle compartimental à trois compartiments

Bien que ce modèle ait été utilisé avec succès pour quantifier le débit sanguin au ^{82}Rb [88, 93], ses trop nombreux paramètres sont difficilement déterminés de manière robuste à partir des mesures fortement bruitées en TEP dynamique [38]. L'utilisation d'un modèle simplifié à deux compartiments permet d'obtenir une meilleure robustesse et une variance plus faible, en plus de simplifier le processus de quantification [37, 38, 111]. Ce modèle est présenté à la figure 7.9.

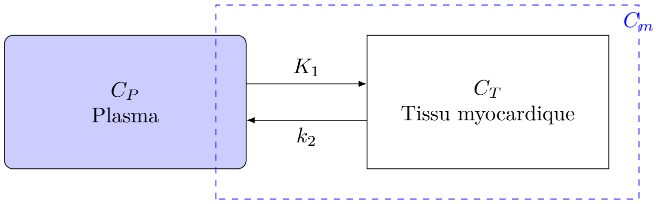


FIGURE 7.9 – Modèle compartimental à deux compartiments

$C_P(t)$ et $C_T(t)$ représentent la concentration radioactive dans les compartiments sanguin et de tissu myocardique. Elles varient au cours du temps et sont exprimées en Bq.mL^{-1}. Les constantes K_1 et k_2 sont des vitesses d'échange et sont donc exprimées en inverse d'unité de temps (min^{-1}). Il faut toutefois noter que souvent la masse volumique ρ est incorporée dans K_1, qui est alors exprimée en mL.min^{-1}.g.

7.5.1.1 Résolution théorique

En un temps infinitésimal dt, $C_p(t)$ perd $K_1 C_P(t)dt$ et gagne $k_2 C_T(t)dt$ et inversement pour C_T. On peut donc écrire :

$$C_T(t + dt) = C_T(t) + K_1 C_P(t)dt - k_2 C_T(t)dt. \tag{7.8}$$

En divisant par dt et en prenant la limite $dt \to 0$, nous obtenons l'équation différentielle décrivant le modèle [78] :

$$\begin{cases} \dfrac{dC_T(t)}{dt} = K_1 C_P(t) - k_2 C_T(t) \\ C_T(0) = 0. \end{cases} \tag{7.9}$$

La solution d'une telle équation différentielle est [78] :

$$C_T(t) = K_1 \exp(-k_2 t) * C_P(t), \tag{7.10}$$

où $*$ désigne l'opération de convolution [4].

7.5.1.2 Adéquation du modèle aux mesures

Nous souhaitons à présent utiliser les images TEP dynamiques pour estimer les constantes cinétiques. Il faut donc pouvoir mesurer C_P et C_T au cours du temps.

C_P représentant la concentration d'activité dans le sang artériel, nous pouvons l'estimer à partir d'une région de l'image ne contenant que du sang. Ainsi, l'intensité des images à un temps t dans une région au centre de la cavité du ventricule gauche, chargée de sang, est une bonne approximation de $C_P(t)$ [104, 111].

D'autre part, l'intensité des images TEP dans le myocarde segmenté donne à chaque temps la concentration C_M. À cause des effets de volume partiel et du fait que le myocarde soit irrigué de sang, C_M ne correspond pas exactement au compartiment de tissu myocardique C_T, mais contient un mélange des deux compartiments. Nous notons V_B la part du compartiment sanguin mesuré dans C_M :

$$C_M(t) = V_B C_P(t) + (1 - V_B) C_T(t). \tag{7.11}$$

En combinant les équations (7.10) et (7.11), il vient :

$$C_M(t) = V_B C_P(t) + (1 - V_B) \exp(-k_2 t) * C_P(t). \tag{7.12}$$

7.5.2 Du taux de captation au débit sanguin

Le taux d'absorption K_1 représente la quantité de radiopharmaceutique cédée par le compartiment sanguin au tissu myocardique par unité de temps. Si à chaque passage dans un capillaire, la totalité du radiopharmaceutique était extraite par le tissu, K_1 correspondrait exactement au débit sanguin (noté F). Cependant, l'extraction dépend des propriétés physico-chimiques de chaque pharmaceutique, et K_1 est alors le produit du débit sanguin F et d'un taux d'extraction E, qui représente la quantité de radiopharmaceutique extraite au premier passage du sang

4. En analyse cinétique, la notation $\otimes$ semble être d'usage pour désigner la convolution. Nous avons décidé de ne pas adopter cette convention par souci de cohérence avec le reste du manuscrit.

dans le capillaire [119]. E. M. Renkin et C. Crone ont proposé, en modélisant les échanges de fluides entre le tissu et les capillaires, un modèle d'extraction dépendant non-linéairement du débit [39, 137] :

$$E(F) = 1 - \exp\left(-\frac{PS}{F}\right), \tag{7.13}$$

où P est la *perméabilité* de la membrane du capillaire pour le radiopharmaceutique considéré (en mL.min^{-1}.g^{-1}.cm^{-3}) et S est la surface totale d'échange des capillaires (en cm^{-3}).

Le produit PS n'est pas non plus constant avec le débit sanguin à cause des mécanismes de recrutement des capillaires lorsque le débit sanguin augmente. Plus particulièrement, K. Yoshida, N. Mullani *et al.* ont montré empiriquement que PS augmente linéairement avec F [176] :

$$PS(F) = \alpha F + \beta. \tag{7.14}$$

En combinant les équations (7.13) et (7.14), l'extraction s'exprime donc par :

$$E(F) = 1 - \exp\left(-\frac{\alpha F + \beta}{F}\right) = 1 - a\exp\left(-\frac{\beta}{F}\right). \tag{7.15}$$

Les valeurs α et β ont été déterminées empiriquement à plusieurs reprises lors d'études de validation [111, 176]. Nous utilisons les mesures de [111] dans notre mise en œuvre.

7.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre le contexte clinique et le tissu industriel de cette thèse. La quantification du débit myocardique est d'importance critique pour le diagnostic et le pronostic des maladies coronariennes. Aussi, de nombreuses méthodes de quantification ainsi que des solutions commerciales existent et sont validées sur des cohortes de patients. Cependant, de nombreuses autres études dénotent des variabilités encore trop élevées entre les méthodes de quantification courantes. En particulier, ces lacunes pointent des axes critiques dans la chaîne de traitement, comme la reconstruction tomographique ou les méthodes de réorientations [79, 106].

Après avoir posé le contexte clinique, nous avons présenté la méthodologie et les choix retenus lors de la conception et de la réalisation d'un outil d'analyse d'images en cardiologie nucléaire. La figure 7.10 présente un aperçu de l'architecture générale de la solution.

La modélisation, la réalisation et les tests de développements de cette solution ont demandé la moitié de mon temps hebdomadaire pendant la réalisation de ma thèse. Nous pouvons remarquer que les reconstructions tomographiques et rotations du volume cardiaque sont bien au centre des préoccupations, même si cela n'occupe qu'un petit pourcentage des travaux de réalisation.

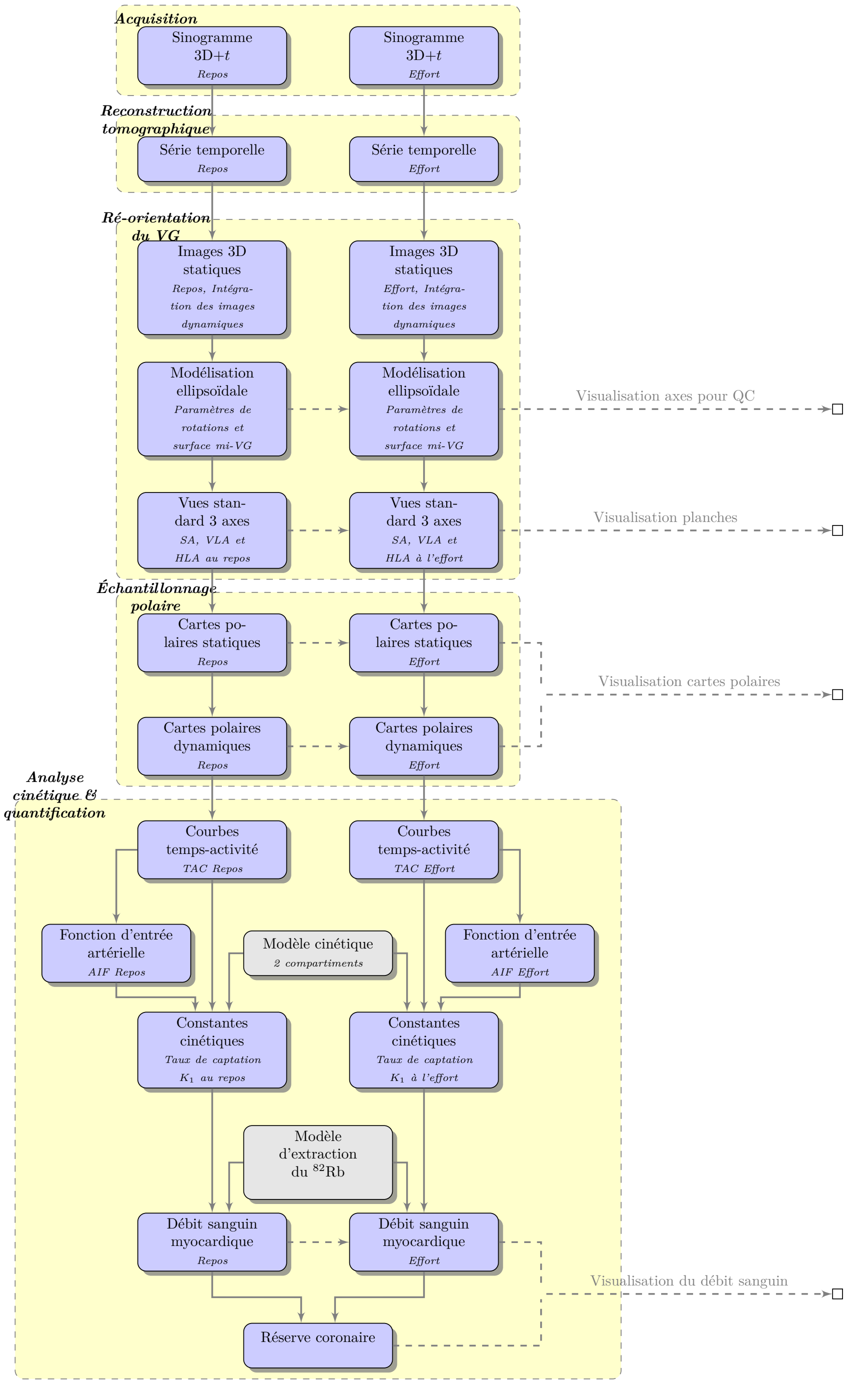


FIGURE 7.10 – Schéma récapitulatif du processus de quantification de la perfusion myocardique et de la réserve coronaire

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de l'espace des projections Mojette dans le cadre de la géométrie discrète et à ses retombées possibles, notamment en imagerie médicale.

Dans un premier temps, un état de l'art sur la tomographie et ses usages nous a permis de dégager l'intérêt de la tomographie discrète, à savoir la prise en compte intrinsèque du caractère discret de l'acquisition et de l'image reconstruite. Plus précisément, la discrétisation directe de la transformée de RADON n'est valable que dans des conditions d'acquisition précises, *suffisamment proches* de la théorie continue. C'est pourquoi, dans le cas de projections en nombre fini ou dans un secteur angulaire restreint, les artefacts de reconstruction ne sont pas négligeables. L'utilisation de la transformée Mojette discrète nous permet en partie de répondre à ces limites.

Nos contributions dans ce travail de thèse se distinguent en quatre axes :

- un premier axe théorique portant sur l'étude de l'espace des projections Mojette pour définir des transformations affines exactes dans cet espace ;
- un second axe expérimental dans lequel nous avons proposé de nouvelles implémentations pour l'utilisation de la reconstruction tomographique Mojette dans un cadre réel d'imagerie médicale ;
- un troisième axe théorique dans lequel nous avons développé une description originale du problème de reconstruction en tomographie discrète ;
- un dernier axe recouvrant l'ensemble des travaux d'industrialisation menés pendant cette thèse concernant la quantification du débit myocardique en imagerie médicale.

Dans le chapitre 4, nous avons défini, dans l'espace des projections Mojette, les translations entières, les rotations discrètes à un facteur d'échelle près et les homothéties comme combinaisons des deux précédentes. Ces transformations sont intéressantes car, l'espace Mojette étant une représentation complète de l'espace discret, elles permettent la manipulation de l'objet avant sa reconstruction sans aucune perte d'information et de manière réversible.

Les transformations sus-citées pouvant introduire un sur-échantillonnage de la grille initiale, nous avons proposé une méthode d'interpolation cohérente avec la géométrie des pixels. De manière intéressante, le filtre utilisé pour interpoler est obtenu par projections discrètes du filtre spatial. Cette propriété de commutativité avec l'opérateur de convolution discrète est l'équivalent de la même propriété pour la transformée de Radon dans le modèle continu, qui n'est pas valable pour une discrétisation quelconque.

Nous pensons que ces résultats pourront être appliqués à la manipulation des données tomographiques avant reconstruction et sans perte d'information. Ces caractéristiques peuvent être intéressantes en imagerie quantitative, par exemple lors de quantification de la perfusion myocardique en médecine nucléaire. Une autre perspective d'application est le recalage des projections entre elles pour les acquisitions longues dans le temps.

Nous avons consacré les deux chapitres suivants au développement de techniques de reconstruction tomographique basées sur la transformée Mojette, d'abord dans un cadre usuel de projections issues de modalités d'acquisition réelles, puis dans un cadre idéal où les projections sont directement acquises dans l'espace Mojette.

Dans le chapitre 5, nous avons investigué deux nouvelles méthodes d'interpolation pour l'utilisation de la transformée Mojette à partir d'une géométrie d'acquisition conventionnelle des dispositifs médicaux. La méthode PP (*rayon le plus proche*) consiste à construire, pour chaque projection d'angle θ, une projection d'angle discret (p, q) approximant le mieux θ selon une précision fixée. Les bins des projections Mojette sont ensuite obtenus par interpolation des bins acquis. La méthode ANG (*interpolation angulaire*) consiste à construire l'ensemble des projections Mojette de la suite de Farey-Haros d'ordre n fixé et à les compléter à partir d'une interpolation à la fois sur l'angle et les bins des projections acquises.

Une série d'expériences a ensuite été réalisée sur des données simulées pour comparer la reconstruction Mojette aux algorithmes classiques du domaine médical. Les résultats obtenus avec l'algorithme de rétroprojection filtrée basée sur la transformée Mojette sont comparables avec la méthode classique. En revanche les reconstructions itératives basées sur la transformée Mojette se révèlent très performantes et surpassent les méthodes classiques, si bien qu'ils suggèrent qu'il est possible de construire des projections discrètes Mojette de manière fiable à partir des projections disponibles initialement. Ainsi, nous pouvons également imaginer tirer parti des traitements efficaces dans l'espace Mojette comme les transformations affines exactes ou des méthodes de reconstruction purement discrètes comme celle développée dans le chapitre 6. Il est important de préciser que notre approche pourrait être encore être améliorée, au niveau de la modélisation des processus physiques pour permettre une meilleure prise en charge du bruit d'acquisition, ou au niveau de la description mathématique en s'intéressant à des espaces d'approximation plus performants. De plus, par mesure d'équité lors de nos comparaisons, nous n'avons utilisé que des algorithmes issus de la tomographie classique adaptés pour la transformée Mojette. Or, la transformée Mojette étant un outil de tomographie discrète, nous pouvons également utiliser une autre classe d'algorithmes dédiée à la tomographie discrète, pour laquelle la transformée Mojette serait encore davantage mise en valeur. En ce sens, les résultats que nous obtenons montre indéniablement l'importance de l'échantillonnage en reconstruction tomographique et l'intérêt de l'utilisation de la transformée Mojette même dans un cadre de tomographie médicale.

Dans le chapitre 6, nous avons exprimé la matrice de projection Mojette sous la forme d'une matrice de Vandermonde. Ici, nous avons modélisé chaque ligne de l'image par un polynôme, dont chaque monôme représente un pixel et le degré de chaque monôme la position horizontale du pixel. Ainsi, l'opérateur de projection Mojette est exprimé par une matrice de polynômes agissant sur ces lignes.

Les systèmes de Vandermonde ayant déjà été largement étudiés en algèbre, algorithmique et calcul numérique, ce paradigme nous permet de profiter de méthodes de résolution performantes et éprouvées pour la reconstruction Mojette. Cette méthode de reconstruction prometteuse doit à présent être éprouvée sur des données acquises ou simulées de manière réaliste.

Cette thèse a été réalisée dans un cadre industriel au sein de la société Keosys pour le projet FUI Quanticardi. Ce projet a pour but de développer des outils de quantification absolue pour la perfusion myocardique à la tomographie par émission de positons après injection de ^{82}Rb. Dans ce but, une routine complète de segmentation et de recalage du ventricule gauche ainsi que la quantification de la perfusion par analyse cinétique a été développée dans le logiciel commercial de la société. Ces cas d'application ont inspiré les développements théoriques précédemment présentés.

Perspectives

Dans cette thèse, nous avons développé des notions de tomographie et de géométrie discrètes avec une application médicale. D. G. Fryback et J. R. Thornbury définissent la qualité en imagerie médicale en six critères [57] [5] : l'avancée technologique, la précision diagnostique, l'impact sur le diagnostic, l'impact thérapeutique, les retombées pour le patient et les retombées pour la société. *A fortiori,* toute recherche en imagerie médicale se doit de servir un de ces critères. Les apports principaux de cette thèse se situent au niveau de la première catégorie. Pour autant, dans le cadre de la recherche en tomographie et géométrie discrètes et de son application à l'imagerie de perfusion myocardique, des perspectives sont envisageables en continuité de notre positionnement technologique ainsi que dans les critères suivants.

Du point de vue des transformations affines discrètes dans l'espace Mojette, une perspective directe est l'extension de nos travaux en trois dimensions, en particulier pour les rotations discrètes de par leur forte implication pour l'imagerie cardiaque. Cette évolution devra être réalisée avec une attention particulière, car le passage de la dimension deux à la dimension trois démultiplie la complexité des grilles discrètes des projections Mojette.

La reconstruction tomographique est également d'importance majeure pour notre application. Notre prochain travail sera d'appliquer nos travaux de reconstruction tomographique basés sur la transformée Mojette à la tomographie d'émission de positons. Cette application nous semble particulièrement indiquée pour plusieurs raisons. La première raison est liée à la géométrie d'acquisition particulière de

5. Traduction libre de ces critères à partir de [11]

la TEP, dont les détecteurs sont disposés sur une série d'anneaux. Les lignes de projections sont toujours définies entre deux capteurs. Il existe donc un nombre fini de configurations possibles et les directions de ces lignes peuvent facilement être interprétées en termes de directions discrètes. De plus, ce dispositif repose sur le dénombrement de photons détectés, encore en nombre fini et non sous forme de flux, donc la quantification du problème de reconstruction est également discrète. Enfin, le problème de données incomplètes est une préoccupation majeure pour la reconstruction tridimensionnelle en TEP. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le recours à la tomographie discrète peut constituer une solution intéressante face à cette problématique.

Il est inutile d'insister sur l'importance de la validation dans un contexte médical. L'évaluation doit être orientée vers une *tâche* précise [11], qui est dans notre cas la quantification absolue de la perfusion myocardique. Aussi nous paraît-il important d'évaluer l'impact des méthodes de reconstruction et de ré-orientation proposées dans cette thèse, de même que pour leur utilisation simultanée, sur la quantification du débit sanguin.

Les problématiques rencontrées dans cette thèse — bien qu'elles ne soient pas toujours présentées comme telles — relèvent dans une large mesure de considérations liées à l'échantillonnage. Ainsi, tout comme nous pensons que l'échantillonnage des projections doit être adapté à la direction d'acquisition de celles-ci, nous pouvons nous interroger d'un point de vue plus global sur les conditions d'échantillonnage temporel de la série d'acquisition en TEP pour la quantification de la perfusion myocardique. Il nous semble en effet important que celles-ci soient adaptées au phénomène que l'on désire mesurer dans le temps et à la fidélité de l'approximation *continue-discrète* souhaitée. Or, nos lectures semblent indiquer que les protocoles d'imagerie de perfusion myocardique en TEP sont établis en fonction de la physique d'acquisition mais aucunement sur les propriétés pharmacocinétiques du radioisotope administré.

Il est devient difficile de nos jours de parler d'échantillonnage sans mentionner la parcimonie. Suite à notre travail, il nous semble intéressant de s'orienter sur la reconstruction à partir de données éparses, c'est-à-dire d'un faible nombre de solutions. En effet, avec l'analyse de l'espace nul de la transformée Mojette et des fantômes, nous avons montré qu'il était possible de dénombrer toutes les solutions admissibles au problème de reconstruction tomographique. Il s'agit alors d'explorer l'utilisation d'information *a priori* adéquate pour privilégier une solution plutôt qu'une autre. En lien avec le chapitre 2, ces aprioris peuvent concerner la quantification des données reconstruites de la même façon qu'en tomographie binaire, tout comme la géométrie et la topologie discrète ou encore d'autres critères basés sur la parcimonie. Le formalisme algébrique introduit au chapitre 6 nous semble bien indiqué pour traiter cette catégorie de problèmes.

Annexes

Annexe A

Modèles continus-discrets et transformée Mojette

Les modèles *continu-discrets* permettent de manipuler des objets continus à partir d'un ensemble fini ou dénombrable d'échantillons discrets.

A.1 Modèles *continu-discrets*

Les modèles *continu-discrets*, essentiels pour le traitement numérique des données, sont justement issus de l'étude de la conversion analogique-numérique des signaux. Ils assurent dans une certaine mesure l'équivalence des traitements continus et discrets en garantissant que l'essentiel de l'information est conservée lors du passage du domaine continu au domaine discret, et *vice versa*.

Dans cette section, tous les modèles que nous traitons sont séparables et symétriques, c'est-à-dire que $f(\boldsymbol{x}) = g(x_1) \cdots g(x_n)$. De ce fait, nous présentons les aspects théoriques dans $\mathbb{R}$ sans perte de généralité, l'adaptation à $\mathbb{R}^n$ étant immédiate.

A.1.1 Théorème d'échantillonnage pour fonctions à bande limitée

Le plus connu de ces modèles est la base de sinus cardinal de WHITTAKER, que C. E. SHANNON a prouvé optimale pour représenter les fonctions à bande limitée en fréquence [148].

En effet, le théorème de SHANNON-WITTAKER-KOTELNIKOV établit qu'un signal à énergie finie $f \in L^2$ et à bande limitée est entièrement déterminé par ses échantillons $f_k = f(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$ pourvu que sa fréquence d'échantillonnage $\frac{1}{T}$ soit supérieure au double de la fréquence maximale contenue dans ce signal [148]. De plus, le signal original peut-être reconstruit par la formule

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f_k \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{T} - k\right), \tag{A.1}$$

où

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{A.2}$$

Cette formule s'interprète immédiatement comme la décomposition de f sur une base de sinus cardinal translatés $\left\{\operatorname{sinc}\left(\frac{x}{T} - k\right)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$, qui constitue alors une base orthonormale de l'espace vectoriel des fonctions de L^2 à bande limitée.

Ce théorème permet donc d'établir une équivalence stricte entre une fonction à bande limitée et sa représentation discrète par l'ensemble dénombrable de ses échantillons. Cette équivalence *continue-discrète* est à la base du traitement numérique du signal et des images.

Cependant, les développements découlant de l'application de ce théorème peuvent mener à de sérieux biais, notamment à cause du phénomène de *repli de spectre*. En particulier dans tout le cadre du chapitre 2, nous avons supposé que notre signal était à support compact dans $\mathbb{R}^2$. Cette hypothèse est fondamentalement incompatible avec l'hypothèse de bande limitée, car un signal ne peut à la fois être compactement supporté dans le domaine spatial et dans le domaine fréquentiel, conséquence directe du fameux principe d'incertitude. Par là-même, la fonction sinus cardinal ayant un support spatial infini, sa mise en œuvre tronquée entraîne des complications connues comme le phénomène d'oscillations de GIBBS [164]. À ce titre, d'autres représentations *continues-discrètes* ont été proposée à partir de fonctions à support spatial compact.

La formule de reconstruction (A.1) permet de caractériser les fonctions de L^2 à bande limitée $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$. L'ensemble de ces fonctions forme un sous-espace fermé de L^2 engendré par les translatés de la fonction sinus cardinal :

$$V_{\mathrm{sinc}_T} = \left\{ s(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} s_k \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{T} - k\right) \,\middle|\, s_k \in \ell^2 \right\}. \tag{A.3}$$

La fonction sinc est cardinale, c'est-à-dire que sa valeur est nulle pour chaque entier, sauf en zéro où elle vaut un. De ce fait, nous avons ici $s_k = s(kT)$.

A.1.2 Échantillonnage généralisé dans un espace invariant par translation

Dans un cadre plus général, étant donné la fonction $f \in L^2$, la fonction $\tilde{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(kT) \operatorname{sinc}\left(\frac{x}{T} - k\right) \in V_{\mathrm{sinc}_T}$ est la projection [1] de f sur V_{sinc_T}. La fonction $\tilde{f}$ est en général différente de f sauf si cette dernière est à bande limitée, donc sauf si f est dans V_{sinc_T}.

Sur ce principe, A. ALDROUBI et M. UNSER ont montré que le paradigme d'échantillonnage de C. E. SHANNON est un cas particulier d'un paradigme d'échantillonnage plus général dans les sous-espaces fermés de L^2 invariants par translation générés par une fonction φ [2, 166] :

$$V_{\varphi_T} = \left\{ f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right) \,\middle|\, c \in \ell^2 \right\}. \tag{A.4}$$

Pour qu'un tel sous-espace V_{φ_T} soit bien défini, la famille $\{\varphi(\frac{x}{T} - k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ doit être une base de RIESZ. Sous cette condition, une fonction $\tilde{f} \in V_{\varphi_T}$ est définie de

1. Si f est pré-filtrée par un filtre passe-bas avant l'échantillonnage, cette projection est orthogonale.

manière unique par ses échantillons pris à intervalle T. De plus, pour une fonction f de L^2, la meilleure approximation $\tilde{f}$ dans V_{φ_T} au sens des moindres carrés est donnée par la projection orthogonale de f sur V_{φ_T} :

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \langle f, \mathring{\varphi}(\cdot - k) \rangle \, \varphi\left(\frac{x}{T} - k\right) \tag{A.5}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire hermitien usuel dans L^2.

$\mathring{\varphi} \in V_\varphi$ est appelée fonction de base *duale* de φ [164] et s'exprime par :

$$\mathring{\varphi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_\varphi^{-1}(k) \varphi(x - k) \tag{A.6}$$

où $a_\varphi(k) = \langle \varphi(\cdot - k), \varphi(\cdot) \rangle$ et $a_\varphi^{-1} \underline{*} \, a_\varphi(k) = \delta_k$.

Ce résultat généralise le théorème de Shannon-Wittaker-Kotelnikov.

A.1.3 Modèles B-Spline

Un cas particulier important de familles de fonctions génératrices d'un sous-espace invariant en translation est la famille des fonctions B-Spline [164, 167]. Ces bases de fonctions ont la particularité d'offrir une très bonne régularité et un ordre d'approximation quasi-optimal des fonctions de L^2 par rapport à leur support compact [20].

La fonction B-spline de degré 0, notée β^0, est équivalente à une fonction porte de largeur $\frac{1}{2}$:

$$\beta^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \tag{A.7}$$

Les fonctions B-Spline de degré $n > 0$ s'obtiennent par la relation de récurrence suivante :

$$\beta^n(x) = \beta^{n-1} * \beta^0(x) = \underbrace{\beta^0 * \cdots * \beta^0}_{n+1 \text{ fois}}(x). \tag{A.8}$$

Les fonctions B-Splines de degré zéro à trois sont présentées sur la figure A.1.

L'ensemble de ces travaux et les applications au traitement du signal et de

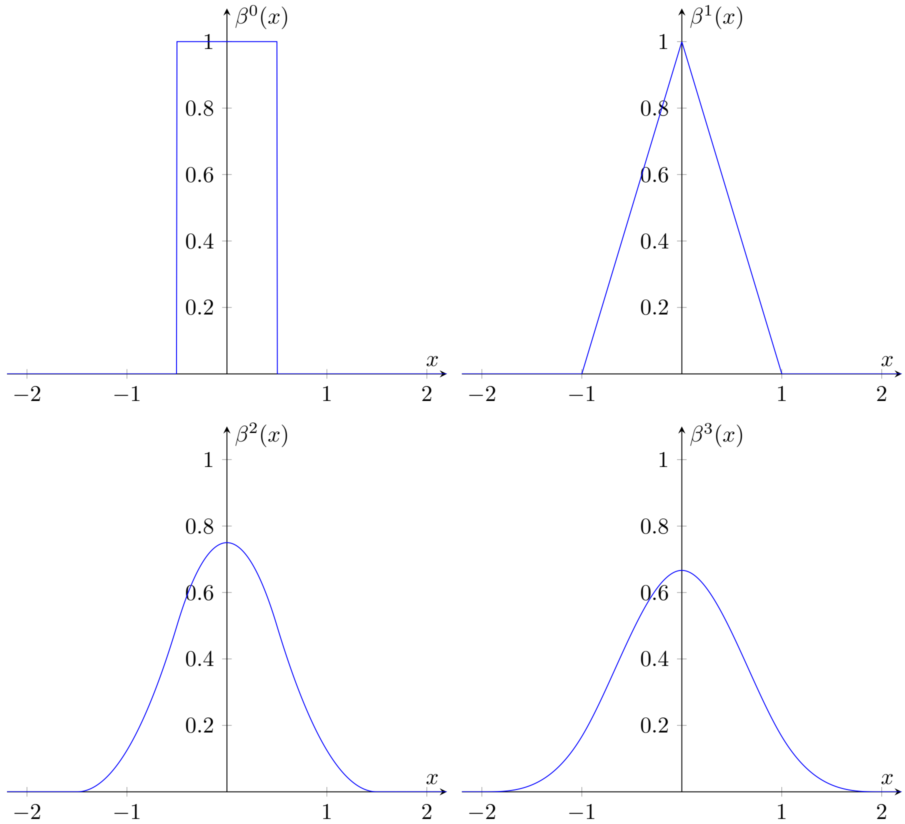


FIGURE A.1 – Fonctions B-Splines de degré 0 à 3

l'image sont résumés dans [164, 165] et étendus dans [49].

A.2 Transformée Mojette dans les espaces invariants en translation

Nous allons présenter une extension de la transformée Mojette aux notions d'échantillonnage généralisé dans les espaces invariants en translation que nous venons de voir [146]. Ceci nous permet d'appliquer un modèle *continu-discret* φ, ou modèle de pixel, pour décrire la fonction à reconstruire.

Pour simplifier les notations, nous considérons que le pas d'échantillonnage de la grille carrée est unitaire.

A.2.1 Transformée Mojette généralisée

La transformée Mojette généralisée a été introduite dans la thèse de M. Servières [146]. Nous en rappelons ici la construction.

Soit f une fonction de V_φ telle que :

$$f_\varphi(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{k,l}\,\varphi\,(x-k, y-l) \tag{A.9}$$

Pour un angle discret $\tan\theta = \frac{q}{p}$, la transformée de Radon de f est :

$$\mathcal{R}f_\varphi(\rho,\theta) = \iint_{\mathbb{R}^2}\sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} c_{k,l}\varphi(x-k,y-l)\delta(\rho + x\sin\theta - y\cos\theta)\,dx\,dy \tag{A.10}$$

$$= \sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} c_{k,l}\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi(x-k,y-l)\delta(\rho + x\sin\theta - y\cos\theta)\,dx\,dy \tag{A.11}$$

$$= \sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} c_{k,l}\iint_{\mathbb{R}^2}\varphi(x',y')\delta(\rho + (x'+k)\sin\theta - (y'+l)\cos\theta)\,dx\,dy \tag{A.12}$$

$$= \sum_{k\in Z}\sum_{l\in Z} c_{k,l}\,\underbrace{\mathcal{R}\varphi(\rho + k\sin\theta - l\cos\theta,\theta)}_{\Phi_\theta(\rho + k\sin\theta - l\cos\theta)} \tag{A.13}$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{k,l}\Phi\left(\rho + \frac{kq}{\sqrt{p^2+q^2}} - \frac{lp}{\sqrt{p^2+q^2}},\theta\right) \tag{A.14}$$

En échantillonnant maintenant l'équation (A.14) en géométrie Mojette :

$$\mathcal{R}f_\varphi\left(\rho = \frac{b}{\sqrt{p^2+q^2}},p,q\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{k,l}\Phi_\theta\left(\frac{b+kq-lp}{\sqrt{p^2+q^2}}\right) \tag{A.15}$$

$$= \sum_{b'\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sum_{l\in\mathbb{Z}} c_{k,l}\Phi_\theta\left(\frac{b-b'}{\sqrt{p^2+q^2}}\right)\Delta(b'+kq-pl) \tag{A.16}$$

$$= \mathcal{M}_{(p,q)}c \,\underline{*}\, \Phi_{(p,q)}(b). \tag{A.17}$$

Dans cette dernière équation, nous voyons que la transformée de Radon échantillonnée sur les projections en géométrie Mojette s'écrit comme la convolution discrète de deux signaux discrets :

— le premier terme est la transformée Mojette de l'image des coefficients $c_{k,l}$;
— le second terme est la transformée de Radon de la fonction de base ϕ, notée ici Φ, échantillonnée aux points $\frac{b}{\sqrt{p^2+q^2}}$.

Nous avons maintenant tous les éléments pour définir la transformée Mojette *généralisée* pour un modèle de pixel φ. Juste avant d'y procéder, remarquons que la définition de la transformée Mojette que nous avions utilisée jusqu'ici est un cas particulier de l'équation (A.17) avec $\varphi = \delta$. En cas d'ambigüité, nous la noterons désormais $\mathcal{M}_\delta f$.

Définition A.2 (Transformée Mojette généralisée dans les espaces invariants en translation [146])**.** Soit $f \in V_\varphi \subset L^2$ et (p,q) un angle discret. On appelle *transformée (ou projection) Mojette généralisée* de f dans la direction (p,q) avec φ comme modèle de pixel l'application qui à f associe un ensemble de bins $\mathcal{M}_{\varphi(p,q)} f(b)$.

De plus, on note $\Phi_{(p,q)}(b) = \mathcal{R}\varphi(\rho,\theta)\Big|_{\substack{\rho=\frac{b}{\sqrt{p^2+q^2}} \\ \tan\theta=\frac{q}{p}}}$ la projection du modèle de pixel φ dans la direction (p,q). Alors :

$$\mathcal{M}_{\varphi(p,q)} f = \mathcal{M}_{\delta(p,q)} f \underline{*} \Phi_{(p,q)}. \tag{A.18}$$

La rétroprojection est définie comme l'opération adjointe de la projection, c'est-à-dire :

$$\forall f,g \ \langle \mathcal{M}_\varphi f, g \rangle_{\ell^2(\mathbb{R})} = \left\langle f, \mathcal{M}_\varphi^* g \right\rangle_{\ell^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{A.19}$$

En développant le terme de gauche avec le produit scalaire usuel de $\ell^2(\mathbb{R})$ dans l'équation (A.19), nous obtenons :

$$\langle \mathcal{M}_\varphi f, g\rangle_{\ell^2(\mathbb{R})} = \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \mathcal{M}_\varphi f(b) g(b) \tag{A.20}$$

$$= \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \left(\mathcal{M} f \underline{*} \Phi_{(p,q)}\right)(b) g(b) \tag{A.21}$$

$$= \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \sum_{b'=-\infty}^{+\infty} \mathcal{M} f(b') \Phi_{(p,q)}(b-b') g(b) \tag{A.22}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} f(k,l) \sum_{b=-\infty}^{+\infty} \sum_{b'=-\infty}^{+\infty} \Phi_{(p,q)}(b-b') g(b) \Delta(b'+kq-lp) \tag{A.23}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty} f(k,l) \sum_{b'=-\infty}^{+\infty} \sum_{b=-\infty}^{+\infty} g(b) \underbrace{\Phi_{(p,q)}(-(b-b'))}_{\tilde{\Phi}_{(p,q)}(b'-b)} \Delta(b'+kq-pl) \tag{A.24}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty} f(k,l) \underbrace{\sum_{b'=-\infty}^{+\infty} \left(g \underline{*} \tilde{\Phi}_{(p,q)}\right)(b') \Delta(b'+kq-pl)}_{\mathcal{M}^*_\varphi g(k,l)} \tag{A.25}$$

$$= \left\langle f, \mathcal{M}^*_\varphi g\right\rangle_{\ell^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{A.26}$$

La rétroprojection Mojette généralisée correspond donc à la rétroprojection Mojette-Dirac du résultat de la convolution de g et du symétrique de $\Phi_{(p,q)}$.

Définition A.3 (Rétroprojection Mojette généralisée dans les espaces invariants en translation [146])**.** Soit g une projection Mojette généralisée dans la direction discrète (p,q). On appelle *rétroprojection Mojette généralisée* de g dans la direction (p,q) avec φ comme modèle de pixel l'application qui à g associe une image discrète $f = \mathcal{M}^*_{\varphi\,(p,q)} g$.

De plus, on note $\Phi_{(p,q)}(b) = \mathcal{R}\varphi(\rho,\theta)\Big|_{\substack{\rho=\frac{b}{\sqrt{p^2+q^2}} \\ \tan\theta=\frac{q}{p}}}$ la projection du modèle de pixel φ dans la direction (p,q) et $\tilde{\Phi}_{(p,q)}(b) = \Phi_{(p,q)}(-b)$. Alors :

$$\mathcal{M}^*_{\varphi\,(p,q)} g = \mathcal{M}^*_{\delta\,(p,q)} \left\{g \underline{*} \tilde{\Phi}_{(p,q)}\right\} \tag{A.27}$$

A.2.2 Transformée Mojette-Spline

La transformée Mojette généralisée est particulièrement intéressante lorsque la fonction de base φ est à support fini, comme c'est le cas pour les fonctions B-Spline. En 2002, J. Guédon et N. Normand ont introduit, avant le cas général, la transformée Mojette généralisée avec un modèle de pixel B-Spline, appelée plus simplement Mojette-Spline [76]. On parle alors de *classe de transformées Mojette-Spline de degré* n, où n est le degré du modèle B-Spline.

Nous notons $S^0_\theta(\rho)$ la projection continue d'une base B-Spline de degré zéro. Son expression est :

$$S^0_\theta(\rho) = \begin{cases} \frac{1}{\max(|\cos\theta|,|\sin\theta|)} & \text{si } |\rho| \leq \left|\frac{|\cos\theta|-|\sin\theta|}{2}\right| \\ \frac{1}{|\cos\theta\sin\theta|}\left(\frac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{2} - |\rho|\right) & \text{si } \left|\frac{|\cos\theta|-|\sin\theta|}{2}\right| \leq |\rho| \leq \frac{|\cos\theta|+|\sin\theta|}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \tag{A.28}$$

J. Guédon et N. Normand ont montré que le noyau de convolution échantillonné $S^0_{(p,q)}(b)$ peut s'écrire comme la convolution discrète de deux fonctions portes discrètes de largeur $|p|$ et q [76] :

$$S^0_{(p,q)} = \begin{cases} \frac{1}{|pq|}\overbrace{\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}}^{|p| \text{ fois}} \ast \overbrace{\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}}^{q \text{ fois}} & \text{si } p \text{ et } q \text{ sont impairs} \\ \frac{1}{2|pq|}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix} \ast \underbrace{\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}}_{|p| \text{ fois}} \ast \underbrace{\begin{pmatrix}1 & \cdots & 1\end{pmatrix}}_{q \text{ fois}} & \text{si } p \text{ ou } q \text{ est pair} \end{cases}. \tag{A.29}$$

Nous remarquons que dans l'équation (A.29), $S^0_{(p,q)}$ est normalisé pour que l'énergie du signal soit conservée, la somme de ses termes est alors unitaire [2]. De plus, $S^0_{(p,q)}$ étant paire quel que soit l'angle de projection, l'opération de filtrage sur la projection Mojette est exactement la même pour la projection Mojette-Spline et pour la rétroprojection Mojette-Spline.

Le modèle de pixel B-Spline de degré zéro permet de distribuer la valeur d'un

2. Cette normalisation n'existe pas dans la publication initiale [76], où il est mis un point d'honneur de ne faire usage que d'additions et soustractions entières.

pixel de manière uniforme sur toute sa surface. Ainsi, chaque bin d'une projection Mojette-Spline de degré zéro est composé de la valeur de chaque pixel traversé par la ligne de projection d'équation $b = pl - kq$, même partiellement, pondérée par la longueur effectivement traversée.

Enfin, $S^0_{(p,q)}$ étant construit sur une fonction B-Spline, nous pouvons obtenir la fonction de base projetée de degré n $S^n_{(p,q)}$ par une opération de convolution semblable à l'équation (A.8) :

$$S^n_{(p,q)} = S^{n-1}_{(p,q)} \underline{*} S^0_{(p,q)} = \underbrace{S^0_{(p,q)} \underline{*} \cdots \underline{*} S^0_{(p,q)}}_{n+1 \text{ fois}} . \tag{A.30}$$

Annexe B

Rappels mathématiques d'algèbre linéaire

Nous donnons ici quelques définitions et théorèmes courants d'algèbre linéaire.

Définition B.1 (Groupe)**.** On appelle *groupe* tout couple $(G, +)$ où G est un ensemble non-vide et $+$ une loi de composition sur G tels que :

Loi de composition interne $\forall (a, b) \in G \times G, a + b \in G$;

Associativité $\forall (a, b, c) \in G \times G \times G, (a + b) + c = a + (b + c)$;

Élément neutre Il existe un élément $e \in G$ tel que $\forall a \in G, a + e = e + a = a$. L'élément e est appelé *élément neutre* du groupe G ;

Symétrique Pour tout élément $a \in G$, il existe $b \in G$ tel que $a + b = b + a = e$. L'élément b est appelé *symétrique* de a.

De plus, un groupe est dit *commutatif* ou *abélien* si la loi de composition interne $+$ est commutative, c'est-à-dire si quels que soient a et b deux éléments de G, $a + b = b + a$.

Définition B.2 (Anneau)**.** Un *anneau* $(A, +, \times)$ est un triplet constitué d'un ensemble non vide A et de deux lois de composition internes sur A, $+$ et $\times$, vérifiant :

— $(A, +)$ est un groupe commutatif ;

— la loi $\times$ est associative ;

— la loi $\times$ possède un élément neutre dans A ;
— la loi $\times$ est distributive par rapport à $+$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\forall(a,b,c) \in A \times A \times A,\ c \times (a+b) &= (c \times a) + (c \times b),\\ (a+b) \times c &= (a \times c) + (b \times c).\end{aligned}$$

De plus, un anneau est dit *commutatif* si sa loi $\times$ est commutative est appelé *anneau commutatif*.

Définition B.3 (Idéal d'un anneau commutatif)**.** Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Une partie $I \subset A$ est un idéal de A lorsque :
— I est un sous-groupe additif de A ;
— J est stable pour la multiplication par un élément de A :

$$\forall a \in A, \forall x \in I, a \times x \in I$$

.

Définition B.4 (Idéal principal)**.** Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et I un idéal de A. I est dit *principal* s'il est engendré par un unique élément, c'est-à-dire :

$$\exists m \in I,\ \forall x \in I, \exists y \text{ tel que } x = my$$

On a alors $I = \{\, my \mid y \in A \,\}$ et on note $I = mA$.

Définition B.5 (Anneau principal)**.** Un anneau commutatif est dit *principal* si tous ses idéaux sont principaux.

Définition B.6 (Anneau quotient)**.** Soit A un anneau et I un idéal principal. La relation R_I définie par :

$$\forall (x,y) \in A^2, xR_Iy \equiv x - y \in I$$

est une relation d'équivalence sur A, compatible avec les lois de A.

Alors l'ensemble A/I composé des *classes d'équivalences* pour R_I muni des deux lois possède une structure d'anneau. A/I est appelé anneau quotient de A par I et on remarque que $A/I = \{ x + I \mid x \in A \}$.

Dans la suite, soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On désigne par $\mathbb{K}[x]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Cet anneau est *euclidien*, c'est-à-dire qu'on peut y définir une division euclidienne. Cette propriété nous permet de définir l'anneau quotient $F_p = \mathbb{K}[x]/P(x)\mathbb{K}[x]$ ainsi que la notion de plus grand diviseur commun.

Définition B.7 (Matrice entière)**.** Une *matrice entière* est une matrice dont les éléments sont dans un anneau A.

Définition B.8 (Matrice unimodulaire)**.** Une matrice carrée est dite *unimodulaire* si elle admet un inverse qui est une matrice entière.

Théorème B.9. Une matrice entière est unimodulaire si et seulement si son déterminant est inversible dans l'anneau.

Ce dernier théorème est très utilisé en pratique pour caractériser les matrices unimodulaires.

Références bibliographiques

[1] Stephan ACHENBACH et Pim J. DE FEYTER, « Cardiac CT and detection of coronary artery disease », in *The ESC Textbook of Cardiovascular Imaging*, José Luis ZAMORANO, Jeroen J. BAX, Frank E. RADEMAKERS et Juhani KNUUTI, éds., Springer London, 2009, chap. 13, p. 267–286, ISBN : 978-1-84882-421-8. DOI : 10.1007/978-1-84882-421-8_13 *Cité page* 228.

[2] Akram ALDROUBI et Michael UNSER, « Sampling procedures in function spaces and asymptotic equivalence with Shannon's sampling theory », *Numerical Functional Analysis and Optimization*, t. 15, n° 1-2, p. 1–21, 1994. DOI : 1080/01630569408816545 *Cité page* 257.

[3] Stéphane ALLAIRE, « Ajustement robuste de quadriques et coniques de types contraints appliqué à la morphométrie tridimensionnelle de structures osseuses », thèse de doct., École Nationale Supérieure des Télécommunications de Bretagne, 20 nov. 2006 *Cité page* 235.

[4] Andreas ALPERS, Richard J. GARDNER, Stefan KÖNIG, Robert S. PENNINGTON, Chris B. BOOTHROYD, Lothar HOUBEN, Rafal E. DUNIN-BORKOWSKI et Kees Joost BATENBURG, « Geometric reconstruction methods for electron tomography », *Ultramicroscopy*, t. 128, p. 42–54, mai 2013. DOI : 10.1016/j.ultramic.2013.01.002 *Cité page* 84.

[5] Jean-Louis AMANS et Gilbert FERRETTI, « La tomographie X médicale », in *La tomographie médicale : Imagerie morphologique et imagerie fonctionnelle*, sér. Traité IC2 Signal et Image, Pierre GRANGEAT, éd., Ouvrage collectif, Hermès - Lavoisier, jan. 2002, chap. 1, p. 33–56, ISBN : 2-7462-0357-X *Cité page* 25.

[6] Anders H. ANDERSEN, « Algebraic reconstruction in CT from limited views », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 8, n° 1, p. 50–55, mar. 1989. DOI : 10.1109/42.20361 *Cité page* 77.

[7] Anders H. ANDERSEN et Avinash C. KAK, « Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) : a superior implementation of the ART algorithm », *Ultrasonic Imaging*, t. 6, n° 1, p. 81–94, fév. 1984. DOI : 10.1016/0161-7346(84)90008-7 *Cité pages* 68, 69, 174.

[8] Éric Andres, Guillaume Damiand et Pascal Lienhardt, éds., *Discrete Geometry for Computer Imagery*, t. 3429, sér. Lecture Notes in Computer Science, Springer Berlin Heidelberg, 13–15 avr. 2005.

[9] Éric Andres et Marie-Andrée Jacob-Da Col, « Transformations affines discrètes », in *Géométrie discrète et images numériques*, sér. Traité IC2 Signal et Image, David Coeurjolly, Annick Montanvert et Jean-Marc Chassery, éds., Ouvrage collectif, Hermès - Lavoisier, 1er sept. 2007, chap. 7, p. 173–190, isbn : 978-2-7462-1643-3 *Cité pages* 146, 166.

[10] Amir Averbuch, Ronald R. Coifman, David Donoho, Michael Elad et M. Israeli, « Fast and accurate polar Fourier transform », *Applied and Computational Harmonic Analysis*, t. 21, nº 2, p. 145–167, sept. 2006. doi : 10.1016/j.acha.2005.11.003 *Cité page* 62.

[11] Harisson H. Barrett, Kyle J. Myers, Christoph Hoeschen, Matthew A. Kupinski et Mark P. Little, « Task-based measures of image quality and their relation to radiation dose and patient risk », *Physics in Medicine and Biology*, t. 60, nº 2, R1–R75, 21 jan. 2015. doi : 10.1088/0031-9155/60/2/R1 *Cité pages* 249, 250.

[12] Kees Joost Batenburg, Sara Bals, Christian Kübel, Paul Midgley, J.C. Hernandez, U. Kaiser, E. R. Encina, E. A. Coronado et Gustaaf Van Tendeloo, « 3D imaging of nanomaterials by discrete tomography », *Ultramicroscopy*, t. 109, nº 6, p. 730–740, mai 2009. doi : 10.1016/j.ultramic.2009.01.009 *Cité page* 84.

[13] Kees Joost Batenburg, Willem Jan Palenstijn, Péter Balàzs et Jan Sijbers, « Dynamic angle selection in binary tomography », *Computer Vision and Image Understanding*, t. 117, nº 4, p. 306–318, avr. 2013. doi : http://dx.doi.org/10.1016/j.cviu.2012.07.005 *Cité page* 83.

[14] Kees Joost Batenburg et Jan Sijbers, « DART : a practical reconstruction algorithm for discrete tomography », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 20, nº 9, p. 2542–2553, sept. 2011. doi : 10.1109/TIP.2011.2131661 *Cité pages* 83, 84.

[15] Habib Benali et Françoise Peyrin, « Les méthodes discrètes : Fondements mathématiques, imagerie microscopique et imagerie industrielle », in *La tomographie : Fondements mathématiques, imagerie microscopique et imagerie industrielle*, sér. Traité IC2 Signal et Image, Pierre Grangeat, éd., Ouvrage collectif, Hermès - Lavoisier, jan. 2002, chap. 4, p. 111–138, isbn : 2-7462-0356-1 *Cité pages* 65, 73.

[16] Serge Beucher et Christian Luantéjoul, « Use of watersheds in contour detection », in *International workshop on image processing, real-time edge and motion detection*, 1979 *Cité page* 124.

[17] Åke Björck et Victor Pereyra, « Solutions of Vandermonde systems of equations », *Mathematics of Computation*, t. 24, nº 112, p. 893–903, oct. 1970. doi : 10.1090/S0025-5718-1970-0290541-1 *Cité pages* 206, 207.

[18] Folkert Bleichrodt, Frank Tabak et Kees Joost Batenburg, « SDART : an algorithm for discrete tomography from noisy projections », *Computer Vision and Image Understanding*, t. 129, p. 63–74, déc. 2014. doi : 10.1016/j.cviu.2014.06.002 *Cité page* 83.

[19] Pierre Bleuet, « Reconstruction 3D par tomosynthèse généralisée. application à l'imagerie médicale par rayons X », thèse de doct., INSA de Lyon, 17 oct. 2002 *Cité page* 27.

[20] Thierry Blu, Philippe Thévenaz et Michael Unser, « MOMS : maximal order interpolation of minimal support », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 10, nº 7, p. 1069–1080, jan. 2001. doi : 10.1109/83.931101 *Cité pages* 64, 258.

[21] Ronald Boellaard, Mike J. O'Doherty, Wolfgang A. Weber, Felix M. Mottaghy, Markus N. Lonsdale, Sigrid G. Stroobants, Wim J. G. Oyen, Joerg Kotzerke, Otto S. Hoekstra, Jan Pruim, Paul K. Marsden, Klaus Tatsch, Corneline J. Hoekstra, Eric P. Visser, Bertjan Arends, Fred J. Verzijlbergen, Josee M. Zijlstra, Emile F. I. Comans, Adriaan A. Lammertsma, Anne M. Paans, Antoon T. Willemsen, Thomas Beyer, Andreas Bockisch, Cornelia Schaefer-Prokop, Dominique Delbeke, Richard P. Baum, Arturo Chiti et Bernd J. Krause, « FDG PET and PET/CT : EANM procedure guidelines for tumour PET imaging : version 1.0 », *European Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, t. 37, nº 1, p. 181–200, jan. 2010. doi : 10.1007/s00259-009-1297-4 *Cité page* 72.

[22] Henri M.J. Boffin, Jan Cuypers et Danny Steeghs, éds., *Astrotomography*, sér. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2001, t. 573, isbn : 978-3-540-45339-0. doi : 10.1007/3-540-45339-3.

[23] Gunilla Borgefors, « Distance transformations in arbitrary dimensions », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, t. 27, nº 3, p. 321–345, sept. 1984. doi : 10.1016/0734-189X(84)90035-5 *Cité page* 118.

[24] Gunilla Borgefors, « Distance transformations in digital images », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, t. 34, nº 3, p. 344–271, juin 1986. doi : 10.1016/S0734-189X(86)80047-0 *Cité page* 118.

[25] Ronald N. BRACEWELL, « Strip integration in radio astronomy », *Australian Journal of Physics*, t. 9, nº 2, p. 198–217, juin 1956. DOI : 10.1071/PH560198 *Cité pages* 52, 54.

[26] Patrick BRIGGER, Jeff HOEG et Michael UNSER, « B-Spline snakes : a flexible tool for parametric contour detection », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 9, nº 9, p. 1484–1496, sept. 2000. DOI : 10.1109/83.862624 *Cité page* 232.

[27] Philippe P. BRUYANT, « Analytic and iterative reconstruction algorithms in SPECT », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 43, nº 10, p. 1343–1358, oct. 2002 *Cité page* 73.

[28] Emmanuel CANDÈS, Justin ROOMBERG et Terence TAO, « Robust uncertainty principles : exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information », *IEEE Transactions on Information Theory*, t. 52, nº 2, p. 489–509, fév. 2006. DOI : 10.1109/TIT.2005.862083 *Cité page* 84.

[29] Jean-Christophe CAUVIN, Jean-Yves BOIRE, Jean C. MAUBLANT, Jean-Marie BONNY, Michel ZANCA et Annie VEYRE, « Automatic detection of the left ventricular myocardium long axis and center in thallium-201 single photon emission computed tomography », *European Journal of Nuclear Medicine*, t. 19, nº 12, p. 1032–1037, déc. 1992. DOI : 10.1007/BF00180864 *Cité page* 233.

[30] Raymond H. CHAN et Michael K. NG, « Conjugate gradient methods for Toeplitz systems », *SIAM Review*, t. 38, nº 3, p. 427–482, 1996. DOI : 10.1137/S0036144594276474 *Cité page* 102.

[31] Shekhar CHANDRA, Imants SVALBE, Jeanpierre GUÉDON, Andrew KINGSTON et Nicolas NORMAND, « Recovering missing slices of the discrete Fourier transform using ghosts », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 21, nº 10, p. 4431–4441, oct. 2012. DOI : 10.1109/TIP.2012.2206033 *Cité page* 100.

[32] David COEURJOLLY, Annick MONTANVERT et Jean-Marc CHASSERY, « Éléments de base », in *Géométrie discrète et images numériques*, sér. Traité IC2 Signal et Image, David COEURJOLLY, Annick MONTANVERT et Jean-Marc CHASSERY, éds., Ouvrage collectif, Hermès - Lavoisier, 1er sept. 2007, chap. 1, p. 27–60, ISBN : 978-2-7462-1643-3 *Cité pages* 111, 112.

[33] David COEURJOLLY, Annick MONTANVERT et Jean-Marc CHASSERY, éds., *Géométrie discrète et images numériques*, sér. Traité IC2 Signal et Image. Hermès - Lavoisier, 1er sept. 2007, Ouvrage collectif, ISBN : 978-2-7462-1643-3.

[34] Allan MacLeod Cormack, « Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications », *Journal of Applied Physics*, t. 34, nº 9, p. 2722–2727, sept. 1963, ISSN : 0021-8979. DOI : 10.1063/1.1729798 *Cité page* 43.

[35] Allan MacLeod Cormack, « Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. II », *Journal of Applied Physics*, t. 35, nº 10, p. 2908–2913, oct. 1964, ISSN : 0021-8979. DOI : 10.1063/1.1713127 *Cité page* 43.

[36] Camille Couprie, Léo Grady, Laurent Najman et Hugues Talbot, « Power watershed : a unifying graph-based optimization framework », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, t. 33, nº 7, p. 1384–1399, juil. 2011. DOI : 10.1109/TPAMI.2010.200 *Cité page* 124.

[37] Pamela G. Coxson, Kathleen M. Brennan, Ronald H. Huesman, Sophanie Lim et Thomas F. Budinger, « Variability and reproducibility of rubidium-82 kinetic parameters in the myocardium of the anesthetized canine », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 36, nº 2, p. 287–296, fév. 1995 *Cité pages* 238, 239.

[38] Pamela G. Coxson, Ronald H. Huesman et Lisa Borland, « Consequences of using a simplified kinetic model for dynamic PET data », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 38, nº 4, p. 660–667, avr. 1997 *Cité pages* 238, 239.

[39] Christian Crone, « The permeability of capillaries in various organs as determined by use of the 'indicator diffusion' method », *Acta Physiologica Scandinavica*, t. 58, nº 4, p. 292–305, août 1963. DOI : 10.1111/j.1748-1716.1963.tb02652.x *Cité page* 241.

[40] Jonathan Darcourt, P. M. Koulibaly et O. Migneco, « Méthodes itératives de reconstruction », *Revue de l'ACOMEN*, t. 4, nº 2, p. 100–107, 1998 *Cité page* 73.

[41] David J. De Rosier et Aaron Klug, « Reconstruction of three dimensional structures from electron micrographs », *Nature*, t. 217, nº 5124, p. 130–134, 13 jan. 1968. DOI : 10.1038/217130a0 *Cité page* 32.

[42] Robert A. deKemp et Claude Nahmias, « Automated determination of the left ventricular long axis in cardiac positron tomography », *Physiological Measurements*, t. 17, nº 2, p. 95–108, mai 1996. DOI : 10.1088/0967-3334/17/2/004 *Cité page* 233.

[43] Laurent DESBAT et Catherine MENNESSIER, « Conditions d'échantillonnage en tomographie : Fondements mathématiques, imagerie microscopique et imagerie industrielle », in *La tomographie : Fondements mathématiques, imagerie microscopique et imagerie industrielle*, sér. Traité IC2 Signal et Image, Pierre GRANGEAT, éd., Ouvrage collectif, Hermès - Lavoisier, jan. 2002, chap. 3, p. 87–110, ISBN : 2-7462-0356-1 *Cité page* 112.

[44] Jean-François DONATI, « Imaging the magnetic topologies of cool active stars », in *Astrotomography : Indirect Imaging Methods in Observational Astronomy*, sér. Lecture Notes in Physics, Henri M.J. BOFFIN, Jan CUYPERS et Danny STEEGHS, éds., t. 573, Springer Berlin Heidelberg, 2001, chap. 14, p. 207–231, ISBN : 978-3-540-45339-0. DOI : 10.1007/3-540-45339-3_14 *Cité page* 29.

[45] Alok DUTT et Vladimir ROKHLIN, « Fast Fourier transforms for nonequispaced data », *SIAM Journal on Scientific Computing*, t. 14, nº 6, p. 1368–1393, nov. 1993. DOI : 10.1137/0914081 *Cité page* 62.

[46] Paul EDHOLM et Gabor T. HERMAN, « Linograms in image reconstruction from projections », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 6, nº 4, p. 301–7, déc. 1987, ISSN : 0278-0062. DOI : 10.1109/TMI.1987.4307847 *Cité page* 62.

[47] Paul EDHOLM, Gabor T. HERMAN et David ROBERTS, « Image reconstruction from linograms : implementation and evaluation », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 7, nº 3, p. 239–46, sept. 1988, ISSN : 0278-0062. DOI : 10.1109/42.7788 *Cité page* 62.

[48] Dietmar EGGEMAN, Jeanpierre GUÉDON et Nicolas NORMAND, « Transferts de documents multimédias sur réseaux à qualité de service », in *CORESA*, Lannion, 1998 *Cité pages* 95, 97.

[49] Yonina C. ELDAR et Tomer MICHAELI, « Beyond bandlimited sampling », *IEEE Signal Processing Magazine*, t. 26, nº 3, p. 48–68, sept. 2009. DOI : 10.1109/MSP.2009.932125 *Cité page* 259.

[50] John FAREY, « On a curious property of vulgar fractions », t. 47, nº 217, p. 385–386, mai 1816. DOI : 10.1080/14786441608628487 *Cité page* 121.

[51] Jeffrey A. FESSLER et Bradley P. SUTTON, « Nonuniform fast Fourier transforms using min-max interpolation », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 51, nº 2, p. 560–574, fév. 2003. DOI : 10.1109/TSP.2002.807005 *Cité page* 62.

[52] Célia Fillion, Alain Daurat, Benoît Naegel, Gabriel Frey et Étienne Baudrier, « A new ab initio reconstruction method from unknown-direction projections of 2D binary set », in *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, 15–18 sept. 2013, p. 1031–1035. doi : 10.1109/ICIP.2013.6738213 *Cité page* 33.

[53] Peter C. Fishburn, Jeffrey Clark Lagarias, J. A. Reeds et Lawrance Alan Shepp, « Sets uniquely determined by projections on axes. ii – discrete case », *Discrete Mathematics*, t. 91, nº 2, p. 149–159, 28 août 1991. doi : 10.1016/0012-365X(91)90106-C *Cité page* 48.

[54] Peter C. Fishburn et Lawrance Alan Shepp, « Sets of uniqueness and additivity in integer lattices : Foundations, algorithms and applications », in *Discrete Tomography : Foundations, Algorithms and Applications*, sér. Applied and Numerical Harmonic Analysis, Gabor T. Herman et Attila Kuba, éds., Birkhäuser Basel, nov. 1999, chap. 2, p. 35–58, isbn : 978-0-8176-4101-6. doi : 10.1007/978-1-4612-1568-4 *Cité page* 48.

[55] Joachim Franck, éd., *Electron tomography*. Springer, 2006, p. 455, isbn : 978-0-387-69008-7 *Cité page* 33.

[56] Joachim Franck, « Principles of electron tomography », in *Electron tomography : Methods for Three-Dimensional Visualization of Structures in the Cell*, Joachim Franck, éd., Springer, 2006, chap. Introduction, p. 1–15, isbn : 978-0-387-69008-7 *Cité page* 32.

[57] Dennis G. Fryback et John R. Thornbury, « The efficacy of diagnostic imaging », *Medical Decision Making*, t. 11, nº 2, p. 88–94, juin 1991. doi : 10.1177/0272989X9101100203 *Cité page* 249.

[58] David Gale, « A theorem on flows in networks », *Pacific Journal of Mathematics*, t. 7, nº 2, p. 1073–1082, fév. 1957. doi : 10.2140/pjm.1957.7.1073 *Cité page* 79.

[59] John Gantz et David Reinsel, « The digital universe in 2020 : big data, bigger digital shadows, and biggest growth in the far east », *IDC iView*, déc. 2012, Sponsorisé par la société EMC *Cité page* 34.

[60] Richard J. Gardner, Peter Gritzmann et Dieter Prangenberg, « On the computational complexity of reconstructing lattice sets from their X-rays », *Discrete Mathematics*, t. 202, nº 1–3, p. 45–71, 6 mai 1999. doi : 10.1016/S0012-365X(98)00347-1 *Cité page* 83.

[61] Guido Germano, « Quantitative analysis in myocardial SPECT imaging », in *Quantitative Analysis in Nuclear Medicine Imaging*, Habib Zaidi, éd. Springer US, 2006, chap. 15, p. 471–493, isbn : 978-0-387-25444-9. doi : 10.1007/0-387-25444-7_15 *Cité page* 233.

[62] Guido Germano, Paul B. Kavanagh, Hsiao-Te Su, Marco Mazzanti, Hosen Kiat, Rory Hachamovitch, Kenneth F. Van Train, Joseph S. Areeda et Daniel S. Berman, « Automatic reorientation of three-dimensional, transaxial myocardial perfusion SPECT images », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 36, nº 6, p. 1107–1114, juin 1995 *Cité pages* 232, 233.

[63] Guido Germano, Paul B. Kavanagh, Parker Waechter, Joseph S. Areeda, Serge Van Kriking, Tali Sharir, Howard C. Lewin et Daniel S. Berman, « A new algorithm for the quantitation of myocardial perfusion SPECT. I : Technical principles and reproducibility », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 41, nº 4, p. 712–719, avr. 2000 *Cité page* 232.

[64] Peter Gilbert, « Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections », *Journal of Theoretical Biology*, t. 36, nº 1, p. 105–117, juil. 1972. doi : 10.1016/0022-5193(72)90180-4 *Cité page* 67.

[65] Richard Gordon, « A tutorial on ART », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 21, nº 3, p. 78–93, juin 1974. doi : 10.1109/TNS.1974.6499238 *Cité page* 43.

[66] Richard Gordon, Robert Bender et Gabor T. Herman, « Algebraic Reconstruction Techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and X-ray photography », *Journal of Theoretical Biology*, t. 29, nº 3, p. 471–476, déc. 1970. doi : 10.1016/0022-5193(70)90109-8 *Cité pages* 33, 43, 45, 66.

[67] David Gottlieb, Bertil Gustafsson et Patrik Forssén, « On the direct Fourier method for computer tomography », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 19, nº 3, p. 223–232, mar. 2000. doi : 10.1109/42.845180 *Cité page* 62.

[68] Pierre Grangeat, éd., *La tomographie : Fondements mathématiques, imagerie microscopique et imagerie industrielle*, sér. Traité IC2 Signal et Image. Hermès - Lavoisier, jan. 2002, Ouvrage collectif, isbn : 2-7462-0356-1.

[69] Huaiqun Guan et Richard Gordon, « A projection access order for speedy convergence of ART (algebraic reconstruction technique) : a multilevel scheme for computed tomography », *Physics in Medicine and Biology*, t. 39, nº 11, p. 2005–2022, nov. 1994. doi : 10.1088/0031-9155/39/11/013 *Cité page* 66.

[70] Jeanpierre Guédon. (2014). Jeu Mojette, adresse : http://www.mojette.net (visité le 17/12/2014) *Cité page* 39.

[71] Jeanpierre Guédon, « Les problèmes d'échantillonnages dans la reconstruction d'images à partir de projections », thèse de doct., École Centrale de Nantes & Université de Nantes, 16 nov. 1990 *Cité page* 52.

[72] Jeanpierre Guédon, éd., *The Mojette Transform : Theory and Applications*. Wiley-ISTE, 9 jan. 2009, isbn : 9781848210806 *Cité pages* 85, 156.

[73] Jeanpierre Guédon, Dominique Barba et Nicole Burger, « Psychovisual image coding via and exact discrete Radon transform », in *Proceedings of SPIE*, Lance T. Wu, éd., sér. Visual Communications and Image Processing, t. 2501, 21 avr. 1995, p. 562–572. doi : 10.1117/12.206765 *Cité pages* 85, 101.

[74] Jeanpierre Guédon et Yves Bizais, « Bandlimited and haar filtered back-projection reconstructions », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 13, nº 3, p. 430–440, sept. 1994. doi : 10.1109/42.310874 *Cité pages* 63, 172.

[75] Jeanpierre Guédon et Nicolas Normand, « Reconstructability with the inverse Mojette transform », in *The Mojette Transform : Theory and Applications*, Jeanpierre Guédon, éd., Wiley-ISTE, 9 jan. 2009, chap. 4, p. 67–83, isbn : 9781848210806 *Cité page* 95.

[76] Jeanpierre Guédon et Nicolas Normand, « Spline Mojette transform. applications in tomography and communications », in *Proceedings of European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, t. 2, sept. 2002, p. 407–410 *Cité page* 263.

[77] Jeanpierre Guédon, Michael Unser et Yves Bizais, « Pixel intensity distribution models for filtered back-projection », in *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC)*, t. 3, 2–9 nov. 1991, p. 2063–2067. doi : 10.1109/NSSMIC.1991.259278 *Cité page* 63.

[78] Roger N. Gunn, Steve R. Gunn et Vincent J. Cunningham, « Positron emission tomography compartmental models », *Journal of Cerebral Blood Flow and Metabolism*, t. 21, nº 6, p. 635–652, mar. 2001. doi : 10.1097/00004647-200106000-00002 *Cité page* 239.

[79] Mojgan Haddad et Gerold Porenta, « Impact of reorientation algorithms on quantitative myocardial SPECT perfusion imaging », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 39, nº 11, p. 1864–1869, nov. 1998 *Cité page* 242.

[80] Antti P. Happonen et Ulla Ruotsalainen, « A comparative study of angular extrapolation in sinogram and stackgram domains for limited angle tomography », in *Scandinavian Conference on Image Analysis 2005*, Heikki Kalviainen, Jussi Parkkinen et Arto Kaarna, éds., sér. Lecture Notes in Computer Science, t. 3540, Springer Berlin Heidelberg, 19–22 juin 2005, p. 1047–1056. doi : 10.1007/11499145_106 *Cité page* 77.

[81] Godfrey Harold Hardy et Edward Maitland Wright, *Introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, 1975, Quatrième édition, isbn : 0-19-85310-7 *Cité page* 121.

[82] Charles Haros, « Tables pour évaluer une fraction ordinaire avec autant de décimales qu'on voudra ; et pour trouver la fraction ordinaire la plus simple, et qui approche sensiblement d'une fraction décimale », *Journal de l'École Polytechnique*, t. 6, n° 11, p. 364–368, 1801 *Cité page* 121.

[83] Gabor T. Herman, « Reconstruction of binary patterns from a few projections », in *International Computing Symposium 1973*, A. Günther, B. Levrat et H. Lipps, éds., 1974, p. 371–378 *Cité page* 83.

[84] Gabor T. Herman et Attila Kuba, éds., *Discrete Tomography : Foundations, Algorithms and Applications*, sér. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Basel, nov. 1999, 501 p., isbn : 978-0-8176-4101-6. doi : 10.1007/978-1-4612-1568-4 *Cité pages* 48, 78, 83.

[85] Gabor T. Herman et Attila Kuba, « Discrete tomography in medical imaging », *Proceedings of the IEEE*, t. 91, n° 10, p. 1612–1626, oct. 2003. doi : 10.1109/JPROC.2003.817871 *Cité pages* 82, 103.

[86] Gabor T. Herman et Arnold Lent, « Iterative reconstruction algorithms », *Computers in Biology and Medicine*, t. 6, n° 4, p. 273–294, oct. 1976. doi : 10.1016/0010-4825(76)90066-4 *Cité page* 67.

[87] Gabor T. Herman, Arnold Lent et Stuart W. Rowland, « ART : mathematics and applications. a report on the mathematical foundations and on the applicability to real data of the algebraic reconstruction techniques », *Journal of Theoretical Biology*, t. 42, n° 1, p. 1–18, 5 nov. 1973. doi : 10.1016/0022-5193(73)90145-8 *Cité pages* 45, 66.

[88] Pilar Herrero, Joanne Markham, Marc E. Shelton et Steven R. Bergmann, « Implementation and evaluation of a two-compartment model for quantification of myocardial perfusion with rubidium-82 and positron emission tomography », *Circulation Research*, t. 70, n° 3, p. 496–507, 1992. doi : 10.1161/01.RES.70.3.496 *Cité page* 238.

[89] Birger Hesse, T.B. Lindhardt, W. Acampa, C. Anagnostopoulos, J. Ballinger, Jeroen J. Bax, L. Edenbrandt, A. Flotats, Guido Germano, T.Gmeiner Stopar, P. Franken, A. Kelion, A. Kjaer, Dominique Le Guludec, M. Ljungberg, A.F. Maenhout, C. Marcassa, J. Marving, F. McKiddie, W. M. Schaefer, L. Stegger et Stephen Richard Underwood, « EANM/ESC guidelines for radionuclide imaging of cardiac function », *European Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, t. 35, n° 4, p. 851–885, avr. 2008. doi : 10.1007/s00259-007-0694-9 *Cité page* 231.

[90] Birger Hesse, K. Tägil, A. Cuocolo, C. Anagnostopoulos, Manuel Bardiès, Jeroen J. Bax, Frank M. Bengel, E. Busemann Sokole, G. Davies, M. Dondi, L. Edenbrandt, P. Franken, A. Kjaer, Juhani Knuuti, M. Lassmann, M. Ljungberg, C. Marcassa, P.Y. Marie, F. McKiddie, M. O'Connor, E. Prvulovich, Stephen Richard Underwood et B. van Eck-Smit, « EANM/ESC procedural guidelines for myocardial perfusion imaging in nuclear cardiology », *European Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, t. 32, nº 7, p. 855–897, juil. 2005. DOI : 10.1007/s00259-005-1779-y *Cité pages* 72, 231.

[91] Stefan Horbelt, Michael Liebling et Michael Unser, « Discretization of the Radon transform and of its inverse by spline convolutions », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 21, nº 4, p. 363–376, avr. 2002. DOI : 10.1109/TMI.2002.1000260 *Cité page* 63.

[92] Godfrey Newbold Hounsfield, « Computerized transverse axial scanning (tomography). 1. Description of system », *British Journal of Radiology*, t. 46, nº 552, p. 1016–1022, déc. 1973 *Cité page* 43.

[93] Sun-Chen Huang, B. A. Williams, J. Krivokapich, L. Araujo, Michael E. Phelps et Heinrich Rudiger Schelbert, « Rabbit myocardial ^{82}Rb kinetics and a compartmental model for blood flow estimation », *American Journal of Physiology*, t. 256, nº 4, H1156–H1164, avr. 1989 *Cité page* 238.

[94] H. Malcolm Hudson et Richard S. Larkin, « Accelerated image reconstruction using ordered subsets of projection data », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 13, nº 4, p. 601–609, déc. 1994. DOI : 10.1109/42.363108 *Cité pages* 71, 72.

[95] Min Jiang et Ge Wang, « Convergence of the simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 12, nº 8, p. 957–961, août 2003. DOI : 10.1109/TIP.2003.815295 *Cité page* 68.

[96] Stefan Kaczmarz, « Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen », *Bull. Acad. Polon. Sci. Lett.*, t. A, p. 355–357, 1937 *Cité page* 45.

[97] Avinash C. Kak et Malcolm Slaney, *Principles of Computerized Tomographic Imaging*. IEEE Press, 1988 *Cité pages* 24, 63, 69, 174.

[98] Myron Bernard Katz, *Questions of uniqueness and resolution in reconstruction from projections*, sér. Lecture Notes in Biomath. Berlin, RFA : Springer-Verlag, 1978, t. 26, ISBN : 3-540-09087-8 *Cité pages* 48, 90, 94, 98.

[99] Andrew KINGSTON, Florent AUTRUSSEAU, Éric GRALL, Thierry HAMON et Benoît PARREIN, « Mojette-based security », in *The Mojette Transform : Theory and Applications*, Jeanpierre GUÉDON, éd., Wiley-ISTE, 9 jan. 2009, chap. 10, p. 239–267, ISBN : 9781848210806 *Cité page* 103.

[100] Andrew KINGSTON, Florent AUTRUSSEAU et Benoît PARREIN, « Multi-resolution Mojette transform », in *The Mojette Transform : Theory and Applications*, Jeanpierre GUÉDON, éd., Wiley-ISTE, 9 jan. 2009, chap. 6, p. 103–131, ISBN : 9781848210806 *Cité page* 213.

[101] Andrew KINGSTON et Imants SVALBE, « A discrete modulo n projective Radon transform for $N \times N$ images », in *Discrete Geometry for Computer Imagery*, Éric ANDRES, Guillaume DAMIAND et Pascal LIENHARDT, éds., sér. Lecture Notes in Computer Science, t. 3429, Springer Berlin Heidelberg, 13–15 avr. 2005, p. 136–147. DOI : 10.1007/978-3-540-31965-8_13 *Cité pages* 91, 138.

[102] Andrew KINGSTON et Imants SVALBE, « Generalised Finite Radon Transform for $N \times N$ images », *Image and Vision Computing*, t. 25, nº 10, p. 1620–1630, 1er oct. 2007. DOI : 10.1016/j.imavis.2006.03.002 *Cité pages* 91, 164.

[103] Andrew KINGSTON et Imants SVALBE, « Mapping between digital and continuous projections via the discrete Radon transform in Fourier space », in *Digital Image Computing : Techniques and Applications*, Changming SUN, Hugues TALBOT, Sébastien OURSELIN et Tony ADRIAANSEN, éds., CSIRO Publishing, 10–12 déc. 2003, p. 263–272 *Cité page* 91.

[104] Ran KLEIN, Jennifer M. RENAUD, Maria C. ZIADI, Stephanie L. THORN, Andy ADLER, Rob S. BEANLANDS et Robert A. DEKEMP, « Intra- and inter-operator repeatability of myocardial blood flow and myocardial flow reserve measurements using rubidium-82 PET and a highly automated analysis program », *Journal of Nuclear Cardiology*, t. 17, nº 4, p. 600–616, août 2010. DOI : 10.1007/s12350-010-9225-3 *Cité pages* 233, 240.

[105] Attila KUBA, « The reconstruction of two-directionally connected binary patterns from their two orthogonal projections », *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, t. 27, nº 3, p. 249–265, sept. 1984. DOI : 10.1016/0734-189X(84)90031-8 *Cité page* 48.

[106] William G. KUHLE, Gerold PORENTA, Sun-Chen HUANG, Michael E. PHELPS et Heinrich Rudiger SCHELBERT, « Issues in the quantitation of reoriented cardiac PET images », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 33, nº 6, p. 1235–1242, juin 1992 *Cité page* 242.

[107] Kenneth LANGE et Richard CARSON, « EM reconstruction algorithm for emission and transmission tomography », *Journal of Computer Assisted Tomography*, t. 8, nº 2, p. 306–316, avr. 1984 *Cité pages* 70, 71.

[108] Dominique LE GULUDEC, Riikka LAUTOMÄKI, Juhani KNUUTI, Jeroen J. BAX et Frank M. BENGEL, « Present and future of clinical cardiovascular PET imaging in Europe–a position statement by the European Council of Nuclear Cardiology (ECNC) », *European Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, t. 35, nº 9, p. 1709–1724, sept. 2008. DOI : 10.1007/s00259-008-0859-1 *Cité page* 230.

[109] Daniel C. LEE et Nils P. JOHNSON, « Quantification of absolute myocardial blood flow by magnetic resonance perfusion imaging », *JACC : Cardiovascular Imaging*, t. 2, nº 6, p. 761–770, juin 2009. DOI : 10.1016/j.jcmg.2009.04.003 *Cité page* 229.

[110] Chuanlin LIU, « La transformée Mojette ligne à 3 matériaux », thèse de doct., Université de Nantes, 27 mai 2013 *Cité pages* 84, 102.

[111] Mireille LORTIE, Rob S. BEANLANDS, Keiichiro YOSHINAGA, Ran KLEIN, Jean N. DASILVA et Robert A. DEKEMP, « Quantification of myocardial blood flow with ^{82}Rb dynamic PET imaging », *European Journal of Nuclear Medicine and Molecular Imaging*, t. 34, nº 11, p. 1765–1774, nov. 2007. DOI : 10.1007/s00259-007-0478-2 *Cité pages* 239–241.

[112] Maria MAGNUSSON, « Linogram and other direct fourier methods for tomographic reconstruction », thèse de doct., Linköping University, S-581 83 Linköping, Sweden, 1993 *Cité page* 62.

[113] Tom R. MARSH, « Doppler tomography », in *Astrotomography : Indirect Imaging Methods in Observational Astronomy*, sér. Lecture Notes in Physics, Henri M.J. BOFFIN, Jan CUYPERS et Danny STEEGHS, éds., t. 573, Springer Berlin Heidelberg, 2001, chap. 1, p. 1–26, ISBN : 978-3-540-45339-0. DOI : 10.1007/3-540-45339-3_1 *Cité pages* 28, 29.

[114] Georges MATHERON, *Random sets and integral geometry*. John Wiley & Sons, 1975, ISBN : 0471576212 *Cité page* 124.

[115] František MATÚŠ et Jan FLUSSER, « Image representation via a finite Radon transform », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, t. 15, nº 10, p. 996–1006, oct. 1993. DOI : 10.1109/34.254058 *Cité pages* 48, 90, 92, 100, 138, 164.

[116] Jianwei MIAO, Friedrich FÖRSTER et Ofer LEVI, « Equally sloped tomography with oversampling reconstruction », *Physical Review B*, t. 72, nº 5, 52103(4), 4 août 2005. DOI : 10.1103/PhysRevB.72.052103 *Cité page* 62.

[117] James K. MIN, Sunaina KODURU, Allison M. DUNNING, Jason H. COLE, Jerome L. HINES, Dawn GREENWELL, Cathie BIGA, Gayle FANNING, Troy M. LA BOUNTY, Millie GOMEZ, James M. HOROWITZ, Martin HADIMITZSKY, Jorg HAUSLEITER, Tracy Q. CALLISTER, Alan R. ROSANSKI, Leslee J. SHAW, Daniel S. BERMAN et Fay Y. LIN, « Coronary CT angiography versus myocardial perfusion imaging for near-term quality of life, cost and radiation exposure : A prospective multicenter randomized pilot trial », *Journal of Cardiovascular Computed Tomography*, t. 6, n^{o} 4, p. 274–283, juil.–août 2012. DOI : 10.1016/j.jcct.2012.06.002 *Cité page* 229.

[118] Ugo MONTANARI, « A method for obtaining skeletons using a quasi-euclidean distance », *Journal of the Association for Computer Machinery*, t. 15, n^{o} 4, p. 600–624, oct. 1968. DOI : 10.1145/321479.321486 *Cité page* 118.

[119] Evan D. MORRIS, Christopher J. ENDRES, Kathleen C. SCHMIDT, Bradley T. CHRISTIAN, Raymond F. MUZIK et Ronald E. FISHER, « Kinetic modeling in positron emission tomography : The fundamentals of PET and SPECT », in *Emission Tomography : The Fundamentals of PET and SPECT*, 499-540, Miles N. WERNICK et John N. AARSVOLD, éds., Academic Press, déc. 2004, chap. 23, ISBN : 9780080521879 *Cité page* 241.

[120] Phuc NGO, Yukiko KENMOCHI, Nicolas PASSAT et Hugues TALBOT, « Topology preserving conditions for 2D digital images under rigid transformations », *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, t. 29, n^{o} 2, p. 418–433, juin 2014. DOI : 10.1007/s10851-013-0474-z *Cité page* 166.

[121] Phuc NGO, Nicolas PASSAT, Yukiko KENMOCHI et Hugues TALBOT, « Topology preserving rigid transformation of 2D digital images », *IEEE Transactions on Image Processing*, t. 23, n^{o} 2, p. 885–897, fév. 2014. DOI : 10.1109/TIP.2013.2295751 *Cité page* 166.

[122] Nicolas NORMAND, « Projections et distances discrètes », Université de Nantes, Habilitation à Diriger des Recherches, 29 nov. 2012 *Cité page* 113.

[123] Nicolas NORMAND, « Représentation d'images et distances discrètes basées sur les éléments structurants à deux pixels », thèse de doct., Université de Nantes, 1997 *Cité pages* 95, 96, 98, 99, 110, 128, 131, 132.

[124] Nicolas NORMAND, Myriam SERVIÈRES et Jeanpierre GUÉDON, « How to obtain a a lattice basis from a projected discrete space », in *Discrete Geometry for Computer Imagery*, Éric ANDRES, Guillaume DAMIAND et Pascal LIENHARDT, éds., sér. Lecture Notes in Computer Science, t. 3429, Springer Berlin Heidelberg, 13–15 avr. 2005, p. 153–160. DOI : 10.1007/978-3-540-31965-8_15 *Cité page* 135.

[125] Nicolas Normand, Imants Svalbe, Benoît Parrein et Andrew Kingston, « Erasure coding with the finite Radon transform », in *Wireless Communications and Networking Conference (WCNC)*, IEEE, 18 avr. 2010, p. 1–6. DOI : 10.1109/WCNC.2010.5506385 *Cité pages* 197, 219.

[126] Bertrand Nouvel et Éric Rémila, « Incremental and transitive discrete rotations », in *Combinatorial Image Analysis 2006*, Ralf Reulke, Ulrich Eckardt, Boris Flach, Uwe Knauer et Konrad Polthier, éds., sér. Lecture Notes in Computer Science, t. 4040, Springer Berlin Heidelberg, 19–21 juin 2006, p. 199–213. DOI : 10.1007/11774938_16 *Cité pages* 142, 146.

[127] Johan Nuyts, Bruno De Man, Jeffrey A. Fessler, Wojciech Zbijewski et Freek J. Beekman, « Modelling the physics in the iterative reconstruction for transmission computed tomography », *Physics in Medicine and Biology*, t. 58, nº 12, R63–R96, juin 2013. DOI : 10.1088/0031-9155/58/12/R63 *Cité page* 74.

[128] Benoît Parrein, Fadi Boulos, Nicolas Normand et Pierre Evenou, « Communication, network and storage », in *The Mojette Transform : Theory and Applications*, Jeanpierre Guédon, éd., Wiley-ISTE, 9 jan. 2009, chap. 7, p. 135–163, ISBN : 9781848210806 *Cité pages* 35–37, 103.

[129] Pascal Petit. (2014). Zeeman-doppler imaging, adresse : http://www.ast.obs-mip.fr/article639.html (visité le 16/12/2014) *Cité pages* 28, 29.

[130] Olivier Philippé, « Représentation d'images pour le codage conjoint source-canal sur des réseaux à qualité de service », thèse de doct., Université de Nantes, 20 nov. 1998 *Cité pages* 98, 99.

[131] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling et Brian P. Flannery, *Numerical Recipes 3rd edition : the art of scientific computing*. New York, USA : Cambridge University Press, 2007, ISBN : 9780521880688 *Cité page* 236.

[132] Johann Radon, « On the determination of functions from their integral values along certain manifolds », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 5, nº 4, p. 170–176, déc. 1986, Traduit de l'allemand par P. C. Parks et publié à titre posthume. DOI : 10.1109/TMI.1986.4307775 *Cité page* 283.

[133] Johann Radon, « Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten », *Berichte der Sächsischen Akadamie der Wissenschaft*, t. 69, p. 262–277, 30 avr. 1917, En allemand. Une traduction anglaise a été publiée en 1986 dans [132] *Cité pages* 49, 50.

[134] Maaria Rantala, Simopekka Vänskä, Seppo Järvenpää, Martti Kalke, Matti Lassas, Jan Moberg et Samuli Siltanen, « Wavelet-based reconstruction for limited-angle X-ray tomography », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 25, nº 2, p. 210–217, fév. 2006. DOI : 10.1109/TMI.2005.862206 *Cité page* 77.

[135] Benoît Recur, « Précision et qualité en reconstruction tomographique : algorithmes et applications », thèse de doct., Université de Bordeaux 1, 29 nov. 2010 *Cité pages* 76, 168.

[136] J. A. Reeds et Lawrance Alan Shepp, « Limited angle reconstruction in tomography via squashing », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 6, nº 2, p. 89–97, juin 1987. DOI : 10.1109/TMI.1987.4307808 *Cité page* 77.

[137] Eugene M. Renkin, « Transport of potassium-42 from blood to tissue in isolated mammalian skeletal muscles », *American Journal of Physiology*, t. 197, nº 6, p. 1205–1210, déc. 1959 *Cité page* 241.

[138] Vanessa Robins, Peter J. Wood et Adrian Sheppard, « Theory and algorithms for constructing discrete Morse complexes from grayscale digital images », *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, t. 33, nº 8, p. 1646–1658, août 2011. DOI : 10.1109/TPAMI.2011.95 *Cité page* 124.

[139] Azriel Rosenfeld et John L. Pfaltz, « Distance functions on digital pictures », *Pattern Recognition*, t. 1, nº 1, p. 33–61, juil. 1968. DOI : 10.1016/0031-3203(68)90013-7 *Cité pages* 114, 115, 117.

[140] Azriel Rosenfeld et John L. Pfaltz, « Sequential operations in digital picture processing », *Journal of the Association for Computer Machinery*, t. 13, nº 4, p. 471–494, oct. 1966. DOI : 10.1145/321356.321357 *Cité page* 115.

[141] Herbert John Ryser, « Combinatorial properties of matrices of zeros and ones », *Canadian Journal of Mathematics*, t. 9, p. 371–377, fév. 1957. DOI : 10.4153/CJM-1957-044-3 *Cité pages* 48, 78–81.

[142] Organisation Mondiale de la Santé. (2015). Principales causes de mortalité dans le monde, adresse : http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs310/fr/index1.html (visité le 05/03/2015) *Cité page* 227.

[143] Jean Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*. London : Academic Press Inc., 1982, t. 1, 610 p., ISBN : 012637242X *Cité page* 124.

[144] Jean Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Jean Serra, éd. Academic Press, 1988, t. 2 : Theoretical Advances, 411 p. *Cité page* 124.

[145] Jean Serra et Bangalore Ravi Kiran, « Optima on hierarchies of partitions », in *Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, Cris L. Luengo Hendriks, Gunilla Borgefors et Robin Strand, éds., sér. Lecture Notes in Computer Science, t. 7883, Springer Berlin Heidelberg, 27–29 mai 2013, p. 147–158. doi : 10.1007/978-3-642-38294-9_13 *Cité page* 124.

[146] Myriam Servières, « Reconstruction tomographique Mojette », thèse de doct., Université de Nantes, 7 déc. 2005 *Cité pages* 101, 102, 110, 136–138, 168, 169, 172, 259–262.

[147] Myriam Servières, Jérôme Idier, Nicolas Normand et Jeanpierre Guédon, « Conjugate gradient Mojette reconstruction », in *Proceedings of SPIE*, J. Michael Fitzpatrick et Joseph M. Reinhardt, éds., sér. Medical Imaging 2005 : Image Processing, t. 5747, 5 mai 2005. doi : doi: 10.1117/12.593399 *Cité pages* 101, 102.

[148] Claude Elwood Shannon, « Communication in the presence of noise », in *Proceedings of the Institude of Radio Engineers (IRE)*, t. 37, jan. 1949, p. 10–21. doi : 10.1109/JPROC.1998.659497 *Cité pages* 49, 256, 257.

[149] Lawrance Alan Shepp et Benjamin Franklin Logan, « The Fourier reconstruction of a head section », *IEEE Transactions on Nuclear Science*, t. 21, nº 3, p. 21–43, juin 1974. doi : 10.1109/TNS.1974.6499235 *Cité pages* 75, 76, 174.

[150] Lawrance Alan Shepp et Yehuda Vardi, « Maximum likelihood reconstruction for emission tomography », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 1, nº 2, p. 113–122, déc. 1982. doi : 10.1109/TMI.1982.4307558 *Cité pages* 70, 71.

[151] Phil Sheridan, Tom Hintz et David Alexander, « Pseudo-invariant image transformations on a hexagonal lattice », *Image and Vision Computing*, t. 18, nº 11, p. 907–917, août 2000. doi : 10.1016/S0262-8856(00)00036-6 *Cité page* 142.

[152] Kennan T. Smith, Donald C. Solmon et Sheldon L. Wagner, « Practical and mathematical aspects of the problem of reconstructing objects from radiographs », *Bulletin of the American Mathematical Society*, t. 83, nº 6, p. 1227–1270, nov. 1977 *Cité pages* 93, 94.

[153] James Elliot Stirrup et Stephen Richard Underwood, « Nuclear cardiology and detection of coronary artery disease », in *The ESC Textbook of Cardiovascular Imaging*, José Luis Zamorano, Jeroen J. Bax, Frank E. Rademakers et Juhani Knuuti, éds., Springer London, 2009, chap. 12, p. 249–

265, ISBN : 978-1-84882-421-8. DOI : 10.1007/978-1-84882-421-8_12 *Cité page* 228.

[154] Arjen Pieter STOLK, « Discrete tomography for integer-valued functions », thèse de doct., Universiteit Leiden, 11 juin 2011 *Cité pages* 79, 80.

[155] Imants SVALBE, « Exact, scaled image rotations in Finite Radon Transform space », *Pattern Recognition Letters*, t. 32, nº 9, p. 1415–1420, 1er juil. 2011. DOI : 10.1016/j.patrec.2010.06.015 *Cité pages* 142, 147, 149, 154.

[156] Imants SVALBE et Jeanpierre GUÉDON, « Discrete versions of the Radon transform », in *The Mojette Transform : Theory and Applications*, Jeanpierre GUÉDON, éd., Wiley-ISTE, 9 jan. 2009, chap. 2, p. 21–40, ISBN : 9781848210806 *Cité page* 91.

[157] Balaji TAMARAPPOO et Rory HACHAMOVITCH, « Myocardial perfusion imaging versus CT coronary angiography : when to use which ? », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 52, nº 7, p. 1079–1086, juil. 2011. DOI : 10.2967/jnumed.110.081133 *Cité page* 229.

[158] Philippe THÉVENAZ, Thierry BLU et Michael UNSER, « Interpolation revisited », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 19, nº 7, p. 739–758, juil. 2000. DOI : 10.1109/42.875199 *Cité page* 171.

[159] Yohan THIBAULT, Yukiko KENMOCHI et Akihiro SUGIMOTO, « Computing admissible rotation angles from rotated digital images », in *Combinatorial Image Analysis 2008*, Valentin E. BRIMKOV, Reneta P. BARNEVA et Herbert A. HAUPTMAN, éds., sér. Lecture Notes in Computer Science, t. 4958, Springer Berlin Heidelberg, 7–9 avr. 2008, p. 99–111. DOI : 10.1007/978-3-540-78275-9_9 *Cité pages* 142, 166.

[160] Éric THIÉBAUT, « Principles of image reconstruction in interferometry », *European Astronomical Society Publications Series*, t. 59, p. 157–187, jan. 2013. DOI : 10.1051/eas/1359009 *Cité pages* 30, 31.

[161] Éric THIÉBAUT et Jean-François GIOVANNELLI, « Image reconstruction in optical interferometry », *IEEE Signal Processing Magazine*, t. 27, nº 1, p. 97–109, jan. 2010. DOI : 10.1109/MSP.2009.934870 *Cité page* 30.

[162] Édouard THIEL, « Géométrie des distances de chanfrein », Université de la Méditerranée, Habilitation à Diriger des Recherches, déc. 2001 *Cité page* 114.

[163] Édouard THIEL et David COEURJOLLY, « Distances discrètes », in *Géométrie discrète et images numériques*, sér. Traité IC2 Signal et Image, David COEURJOLLY, Annick MONTANVERT et Jean-Marc CHASSERY, éds., Ouvrage collectif, Hermès - Lavoisier, 1er sept. 2007, chap. 5, p. 127–150, ISBN : 978-2-7462-1643-3 *Cité pages* 114, 115.

[164] Michael UNSER, « Sampling – 50 years after Shannon », *Proceedings of the IEEE*, t. 88, nº 4, p. 569–587, avr. 2000. DOI : 10.1109/5.843002 *Cité pages* 257–259.

[165] Michael UNSER, « Splines : a perfect fit for signal and image processing », *IEEE Signal Processing Magazine*, t. 16, nº 6, p. 22–38, nov. 1999. DOI : 10.1109/79.799930 *Cité pages* 64, 259.

[166] Michael UNSER et Akram ALDROUBI, « A general sampling theory for nonideal acquisition devices », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 42, nº 11, p. 2915–2925, nov. 1994. DOI : 10.1109/78.330352 *Cité page* 257.

[167] Michael UNSER, Akram ALDROUBI et Muray EDEN, « B-Spline signal processing : Part I – Theory », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 41, nº 2, p. 821–833, fév. 1993. DOI : 10.1109/78.193220 *Cité pages* 162, 258.

[168] Michael UNSER, Akram ALDROUBI et Muray EDEN, « B-Spline signal processing : Part II – Efficient design and applications », *IEEE Transactions on Signal Processing*, t. 41, nº 2, p. 834–848, fév. 1993. DOI : 10.1109/78.193221 *Cité page* 162.

[169] Sandra VAN AERT, Kees Joost BATENBURG, Marta D. ROSSELL, Rolf ERNI et Gustaaf VAN TENDELOO, « Three-dimensional atomic imaging of crystalline nanoparticles », *Nature*, t. 470, nº 7334, p. 374–377, 17 fév. 2011. DOI : 10.1038/nature09741 *Cité pages* 33, 84.

[170] Alexandre VAN KEMPEN, « Optimiser l'utilisation de la bande passante dans les systèmes de stockage distribué », thèse de doct., Université de Rennes 1, 8 mar. 2013 *Cité page* 35.

[171] Pierre VERBERT, « Sur la redondance des transformations Mojette en dimension n et en ligne », thèse de doct., Université de Nantes, sept. 2004 *Cité pages* 93, 102.

[172] Pierre VERBERT et Jeanpierre GUÉDON, « Transformation mojette en dimension n », in *GRETSI*, 2001 *Cité page* 134.

[173] Johan WALDEN, « Analysis of the direct Fourier method for computer tomography », *IEEE Transactions on Medical Imaging*, t. 19, nº 3, p. 211–222, mar. 2000. DOI : 10.1109/42.845179 *Cité pages* 61, 62.

[174] WIKIPÉDIA. (2014). Tomographie, adresse : http://fr.wikipedia.org/wiki/Tomographie (visité le 12/12/2014) *Cité page* 22.

[175] Yongchao Xu, Thierry Géraud et Laurent Najman, « Morphological filtering in shape spaces : applications using tree-based image representations », in *IEEE International Conference on Pattern Recognition (ICPR)*, 11–15 nov. 2012, p. 485–488 *Cité page* 124.

[176] Katsuya Yoshida, Nizar Mullani et K. Lance Gould, « Coronary flow and flow reserve by PET simplified for clinical applications using rubidium-82 or nitrogen-13-ammonia », *Journal of Nuclear Medicine*, t. 37, n° 10, p. 1701–1712, oct. 1996 *Cité pages* 238, 241.

[177] José Luis Zamorano, Jeroen J. Bax, Frank E. Rademakers et Juhani Knuuti, éds., *The ESC Textbook of Cardiovascular Imaging*. Springer London, 2009, isbn : 978-1-84882-421-8. doi : 10.1007/978-1-84882-421-8.

Production scientifique

Conférences internationales avec comité de lecture et actes

1. Imants SVALBE, Andrew KINGSTON, Nicolas NORMAND et **Henri Der Sarkissian**, « Back-projection filtration inversion of discrete projections », in *Discrete Geometry for Computer Imagery*, Elena BARCUCCI, Andrea FROSINI et Simone RINALDI, éds., sér. Lecture Notes in Computer Science, t. 8668, Sienne, Italie, 10–12 sept. 2014, p. 238–249. DOI : 10.1007/978-3-319-09955-2_20

2. **Henri Der Sarkissian**, Benoît RECUR, Jeanpierre GUÉDON, Pauline BLÉRY, Pierre PILET et Yves AMOURIQ, « Mojette tomographic reconstruction for micro-CT : a bone and vessels quality evaluation », in *Proceedings of SPIE*, Bruce R. WHITING et Christoph HOESCHEN, éds., sér. Medical Imaging 2014 : Physics of Medical Imaging, t. 9033, San Diego, USA, 19 mar. 2014. DOI : 10.1117/12.2043062

3. Benoît RECUR, **Henri Der Sarkissian** et Myriam SERVIÈRES, « Global scheme for iterative Mojette reconstructions », in *IEEE International Confe-*

rence on Image Processing (ICIP), Paris, France, 27–30 oct. 2014, p. 1748–1752. DOI : 10.1109/ICIP.2014.7025350

4. **Henri Der Sarkissian**, Benoît Recur, Nicolas Normand et Jeanpierre Guédon, « Rotations in the Mojette space », in *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, Melbourne, Australie, 15–18 sept. 2013, p. 1187–1191. DOI : 10.1109/ICIP.2013.6738245
5. Benoît Recur, **Henri Der Sarkissian**, Myriam Servières, Nicolas Normand et Jeanpierre Guédon, « Validation of Mojette reconstruction from Radon acquisitions », in *IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*, Melbourne, Australie, 15–18 sept. 2013, p. 1041–1045. DOI : 10.1109/ICIP.2013.6738215
6. **Henri Der Sarkissian**, Benoît Recur, Jeanpierre Guédon, Pierre Tervé, Nicolas Normand et Imants Svalbe, « Discrete Mojette rotations of PET-CT images », in *Treatement & Analysis of Information : Methods & Applications (TAIMA)*, Basel Solaiman, Imed Riadh Farah, Faten Chaeib, Majdi Jribi et Faouzi Ghorbel, éds., t. 1, Hammamet, Tunisie, 13–18 mai 2013, p. 89–94
7. Benoît Recur, **Henri Der Sarkissian**, Jeanpierre Guédon et Imants Svalbe, « Tomosynthesis using discrete transforms », in *Treatement & Analysis of Information : Methods & Applications (TAIMA)*, Basel Solaiman, Imed Riadh Farah, Faten Chaeib, Majdi Jribi et Faouzi Ghorbel, éds., t. 1, Hammamet, Tunisie, 13–18 mai 2013, p. 57–62
8. Marie-Paule Garcia, Daphnée Villoing, Erin McKay, Ludovic Ferrer, **Henri Der Sarkissian**, Marc Poirot et Manuel Bardiès, « Generation of whole-body scintigraphic images with new GATE output capacities », in *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC)*, 27 oct.–2 nov. 2013, p. 1–3. DOI : 10.1109/NSSMIC.2013.6829150
9. Marie-Paule Garcia, **Henri Der Sarkissian**, Erin McKay, Ludovic Ferrer, Manuel Bardiès, Daphnée Villoing, Hadj Batatia, Adrian Basarab, Jean-Yves Tourneret et Denis Kouamé, « TestDose : a SPECT

image generator for clinical dosimetry studies », in *Proceedings of SPIE*, Robert M. Nishikawa et Bruce R. Whiting, éds., sér. Medical Imaging 2013 : Physics of Medical Imaging, t. 8668, Lake Buena Vista, USA, 9 fév. 2013. doi : 10.1117/12.2007840

Conférences internationales avec comité de lecture et résumés

10. **Henri Der Sarkissian**, Benoît Recur, Nicolas Normand et Jeanpierre Guédon, « Mojette space transformations », in *Sino-French Workshop on Research Collaborations in Information and Communication Technologies (SIFWICT)*, Guangzhou, Chine, juin 2013
11. **Henri Der Sarkissian**, Jeanpierre Guédon, Pierre Tervé, Nicolas Normand et Imants Svalbe, « Evaluation of discrete angles rotation degradation for myocardial perfusion imaging », in *European Association of Nuclear Medicine (EANM) Annual congress*, Milan, Italie, oct. 2012

Présentations orales

12. **Henri Der Sarkissian**, Benoît Recur, Nicolas Normand, Jeanpierre Guédon et Imants Svalbe, « Rotations discrètes et reconstructions dans l'espace Mojette », in *Les 20 ans de la transformée Mojette*, Nantes, France, 5 fév. 2015
13. **Henri Der Sarkissian**, Benoît Recur, Nicolas Normand et Jeanpierre Guédon, « Rotations discrètes dans l'espace Mojette », in *Journées du groupe de travail CNRS Géométie Discrète*, Paris, France, 13 juin 2013
14. **Henri Der Sarkissian**, Benoît Recur, Jeanpierre Guédon et Nicolas Normand, « Validation de la reconstruction tomographie Mojette à partir de données réelles », in *7es journées du Cancéropôle Grand Ouest*, Les Sables d'Olonne, France, 2–3 avr. 2013

15. **Henri Der Sarkissian**, Ludovic FERRER, Jérôme SUHARD et Manuel BARDIÈS, « Enhancement of SPECT system energy response for multi-peak isotopes », in *GATE developers annual workshop*, Paris, France, mai 2011

l'université nantes angers le mans
COMMUNAUTÉ D'UNIVERSITÉS ET ÉTABLISSEMENTS

UNIVERSITÉ DE NANTES

Thèse de Doctorat

Henri DER SARKISSIAN

Tomographie et géométrie discrètes avec la transformée Mojette

Tomography and discrete geometry using the Mojette transform

Résumé

Dans cette thèse, nous explorons les voies offertes par la tomographie discrète par rapport à la tomographie classique en milieu continu. Nous utilisons la transformée Mojette, version discrète et exacte de la transformée de Radon, que nous présentons comme un lien entre la tomographie classique et la tomographie discrète. Nous nous attachons à l'étude de l'espace sous-jacent à l'opérateur de transformée Mojette. Ce travail se décline suivant quatre axes de recherche.
L'axe 1 est consacré au comportement de l'espace Mojette pour les transformations affines discrètes de l'image. Nous montrons qu'il est possible de réaliser certaines transformations affines directement à partir des projections discrètes d'un objet, sans reconstruction préalable.
L'axe 2 consiste à examiner les liens entre les projections continues issues de modalités d'acquisitions en imagerie médicale et celles obtenues par transformée Mojette. Nous présentons différentes méthodes d'estimation des projections discrètes à partir de projections continues — réelles ou simulées — et leur reconstruction.
L'axe 3 a pour objet l'inversion algébrique de la transformée Mojette. Les données d'entrée, les projections et les opérateurs sont modélisés par des polynômes. Ce formalisme, relevant de la tomographie discrète, permet d'exprimer la matrice de transformation Mojette sous forme Vandermonde.
Cette thèse a été réalisée conjointement à l'IRCCyN et à Keosys dans le cadre du projet FUI Quanticardi.
L'axe 4 est dédié à la conception et au développement d'un logiciel de quantification absolue de la perfusion myocardique en tomographie par émission de positons.

Mots clés

Tomographie discrète, géométrie discrète, transformée Mojette, transformées affines discrètes, imagerie médicale, projet Quanticardi, tomographie.

Abstract

We explore through this thesis the insights of discrete tomography over classical tomography in continuous space. We use the Mojette transform, a discrete and exact form of the Radon transform, as a link between classical tomography and discrete tomography. We focus especially on the study of the discrete space induced by the Mojette transform operator through four research axis.
Axis 1 focuses on the Mojette space properties in regards to discrete affine transforms of digital images. We provide tools to achieve affine transforms directly from the projections of a digital object, without preliminary tomographic reconstruction. This property is well-known for the continuous Radon transform but non-trivial for its sampled versions.
Axis 2 seeks for some links between continuous-sampled projections related to medical imaging acquisition modalities and discrete projections derived by the Mojette transform. We implement interpolation schemes to estimate discrete projections from the continuous ones — on either synthetic or real data — and their reconstruction.
In axis 3, we provide an algebraic framework for the description and inversion of the Mojette transform. The input data, the projections as well as the operators are modeled as polynomials. Within this framework, the Mojette projection operator advantageously reduce to a Vandermonde matrix.
This thesis has been realized at both IRCCyN Lab and Keosys company within the Quanticardi FUI project.
Axis 4 focuses on the design and the implementation of a clinical software for the absolute quantification of myocardial perfusion with positron emission tomography.

Key Words

Discrete tomography, discrete geometry, Mojette transform, discrete affine transforms, medical imaging, Quanticardi project, tomography.